

PC 解析

野澤恵理花¹

共同実験者

HA さん

実験日時

平成 26 年	11 月	10 日	13 時 20 分	~	16 時 30 分
平成 26 年	11 月	17 日	13 時 20 分	~	16 時 30 分
平成 26 年	11 月	24 日	13 時 20 分	~	16 時 30 分
平成 26 年	12 月	1 日	13 時 20 分	~	16 時 30 分

要旨

コンピューターは、実験によって得られた測定データの解析ツールとして、広く用いられている。本解析では、Windows7 の操作を学ぶと共に、数値解析用ソフトウェア Origin による多項式フィット、ピークフィット、FFT などを通して、コンピューターを用いたデータ解析の方法について学ぶ。

¹g1220217@edu.cc.ocha.ac.jp

1 序論

コンピューターを用いて、実験により得られた測定データを解析したい。例えば、測定データのある量を横軸にとり、別の量を縦軸にとったグラフを作図したときに、そのグラフから2つの量の間に関係性が予想されたとすれば、2つの量を結ぶ適当な関係式を求めるだろう。あるいは、測定データから何らかの波形が得られたときには、それに対してフーリエ変換を行い、振幅スペクトルやパワースペクトルから周波数特性を求めるだろう。このとき、測定データには必ず誤差が含まれていることに注意する必要がある。誤差として例えば、ノイズ、バックグラウンド、偶然誤差、測定装置に起因する系統誤差などが挙げられる^{[1][2]}。私たちがコンピューターを用いて測定データを解析するときには、必ず誤差の処理についても考慮しなければならない。そのような誤差を含んだ測定データの処理方法を処理目的、処理の種類、アルゴリズムについてまとめると、表1のようになる^[2]。

表 1: 計測における波形処理の種類とアルゴリズム (文献 [2] より引用)

処理目的	処理の種類	アルゴリズム
一般波形の周波数解析	積分変換処理	フーリエ変換 (DFT、FFT)
雑音解析	振幅分布分析 相関関数測定	確率密度関数演算 自己相関関数演算、フーリエ変換
計測系の動特性推定	装置関数測定 システム関数測定	フーリエ変換、ラプラス変換 自己相関関数演算
信号対雑音比改善	積算平均化処理 平滑化処理	アンサンブル平均演算 表領域 (時間あるいは波数): 重みつき移動平均 (コンボリューション) 裏領域 (周波数): フィルタ特性を用いた周波数領域演算、フーリエ変換
信号波形検出と抽出	周期的信号抽出 ピーク検出と抽出	自己相関関数演算 相互相関関数演算、微分演算、平滑化を介した直線化手法
波形正確度・分解能の向上	ディコンボリューション	表領域: 連立方程式法 (反復法: 同時過剰緩和法、逐次過剰緩和法などのSOR法)、コンボリューション法 裏領域: インバース・フィルタリング処理、フーリエ変換
重畳波形パラメータ抽出	波形分解処理	非線形最小二乗法によるパラメータ推定
混合試料系の成分分離	スペクトル分離処理	線形最小二乗法、線形計画法、多変量解析手法
波形データの圧縮	ピーク位置検出処理 面積計算 波形歪量計算	微分法 (平滑化微分) 積分計算 高次モーメント計算
マルチプレクス分光法	積分変換処理	フーリエ変換、アダマール変換

本解析では、Windows7 の操作を学ぶと共に、数値解析用ソフトウェア Origin を用いて、表 1 にある一般波形の周波数解析、雑音解析、重畳波形パラメータ抽出などを行うことで、コンピューターによるデータ解析の方法を学ぶ。

2 原理

この節では、次の項目について述べる。

- 尤度と AIC
- フーリエ変換と FFT

2.1 尤度と AIC

データ数を N とし、測定条件 $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ のもとで測定された測定値 $y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ がある。測定値 y は標準偏差 $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$ を持ち、その値は既知であるとする。図 1 に、測定条件 x 、測定値 y 、標準偏差 σ の例を示す。

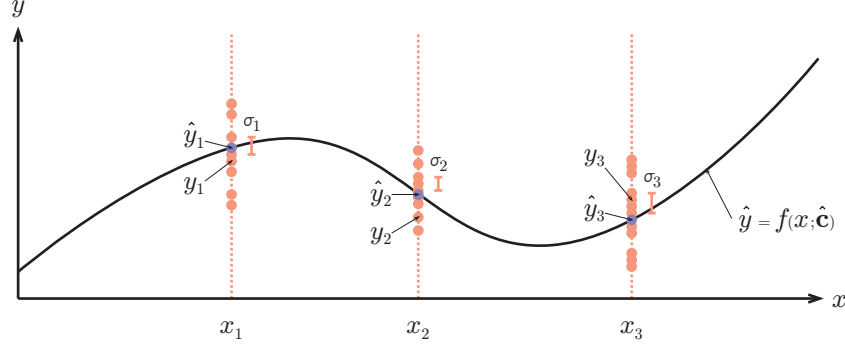


図 1: 測定条件 x 、測定値 y 、標準偏差 σ の例。横軸は x であり、縦軸は y である。赤い点線は測定条件 x_i 、赤い点は y_i を含む測定値、赤いバーは標準偏差 σ_i 、青い点は推定値 \hat{y}_i を表し、黒い曲線はモデル関数 $f(x; \hat{c})$ を表す。測定条件 x_i ごとの測定値のばらつきによって標準偏差 σ_i が得られる。

パラメーター数を M とし、測定条件 x 、測定値 y 、標準偏差 σ からパラメーター推定値 $\hat{c} = \{\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_M\}$ のモデル関数 $f(x_i; \hat{c})$ を求め、推定値 $\hat{y} = \{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N\}$ を計算する。測定値 y に対して、推定値 \hat{y} がどれくらい尤もらしいかを評価する量に尤度がある。推定値 \hat{y}_i の尤度 $L(\hat{y}_i|y_i)$ は、

$$L(\hat{y}_i|y_i) \equiv P(y_i|\hat{y}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{2\sigma_i^2}} \quad (1)$$

と定義される^[1]。ここで、 $P(y_i|\hat{y}_i)$ は平均 \hat{y}_i 、分散 σ_i^2 のガウス分布である。全推定値の尤度 $L(\hat{y}|y)$ は、

$$L(\hat{y}|y) = \prod_{i=1}^N L(\hat{y}_i|y_i) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{2\sigma_i^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i}\right) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma_i^2}} \quad (2)$$

となる。両辺の \ln をとって、対数尤度 $LL(\hat{y}|y)$ は

$$LL(\hat{y}|y) = \ln L(\hat{y}|y) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \sum_{i=1}^N \ln(\sigma_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (3)$$

となる。 σ は既知の定数であるので、対数尤度 $LL(\hat{y}|y)$ が最大値を取るのは、式 (3) の右辺第三項、すなわち、残差の二乗和 S 、

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (4)$$

が最小値を取るときである。対数尤度 $LL(\hat{y}|y)$ が最大となる（残差の二乗和 S が最小となる）推定値 \hat{y} を \hat{y}^* とし、最大対数尤度 $MLL(\hat{y}^*|y)$ は、

$$MLL(\hat{y}^*|y) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \sum_{i=1}^N \ln(\sigma_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \hat{y}_i^*)^2}{\sigma_i^2} \quad (5)$$

となる。赤池の情報量規準 AIC は、最大対数尤度 $MLL(\hat{\mathbf{y}}^*|\mathbf{y})$ とパラメーター数 M を用いて、

$$AIC \equiv -2MLL(\hat{\mathbf{y}}^*|\mathbf{y}) + 2M \quad (6)$$

と定義される^[3]ので、式(5)の定数項を無視すると(AIC は相対量であるため)、 AIC は、

$$AIC = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \hat{y}_i^*)^2}{\sigma_i^2} + 2M \quad (7)$$

となる^[4]。また、残差の二乗和 S 、データ数 N 、パラメーター数 M を用いて、標準偏差 σ_{STD} を、

$$\sigma_{STD}^2 = \frac{S}{N - M} \quad (8)$$

と定義する^[4]。標準偏差 σ_{STD} の二乗が1に近いほど、モデル関数 $f(x_i; \hat{\mathbf{c}})$ は測定値 \mathbf{y} をよく表しているものと考えられる^[4]。

2.2 フーリエ変換とFFT

この小節では、次の項目について述べる。

- フーリエ変換
- DFT (離散フーリエ変換)
- FFT (高速フーリエ変換)

2.2.1 フーリエ変換

時間変動する連続量を $X(t)$ とするとき、 $X(t)$ のフーリエ変換は、

$$S(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-i\omega t} dt \quad (9)$$

と定義される^[4]。ここで、 $S(\omega)$ は $X(t)$ のフーリエ成分である。フーリエ成分 $S(\omega)$ は複素数であるので、

$$S(\omega) = A(\omega)e^{i\theta(\omega)} \quad (10)$$

と表すことができる。このとき、 $A(\omega)$ ($A(\omega) \geq 0$) をフーリエ成分 $S(\omega)$ の強度、 $\theta(\omega)$ をフーリエ成分 $S(\omega)$ の位相と言う。また、 $X(t)$ のパワースペクトル $p(\omega)$ は、

$$p(\omega) \equiv |S(\omega)|^2 = A(\omega)^2 \quad (11)$$

と定義される^[4]。

2.2.2 DFT (離散フーリエ変換)

離散的な量をフーリエ変換する手法に DFT (Discrete Fourier Transform、離散フーリエ変換)^[2]がある。 $X(t)$ を時間間隔 Δt ごとにサンプリングしたとし、離散時刻 $t = k\Delta t$ (k は整数) において $X(k\Delta t) = X_k$ とする。このとき、離散的なフーリエ成分 $S_l = S(l\Delta\omega)$ (l は整数) は、

$$S_l = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{-i(l\Delta\omega)(k\Delta t)} \Delta t \quad (12)$$

となる。\$X_k\$ は有限個であることから、データ数を \$N\$ として、式 (12) は、

$$S_l = \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{kl} \Delta t \quad (k, l = 0, 1, \dots, N-1) \quad (13)$$

となる。ここで、

$$W_N^{kl} = e^{-i(l\Delta\omega)(k\Delta t)} \quad (14)$$

とした。\$\Delta t = 1\$ とすると、\$\Delta\omega\$ は、

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t} = \frac{2\pi}{N} \quad (15)$$

となり、式 (13) は、

$$S_l = \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{kl} \quad (k, l = 0, 1, \dots, N-1) \quad (16)$$

となる。ここで、

$$W_N^{11} = W_N^1 = e^{-i\frac{2\pi}{N}} = \cos \frac{2\pi}{N} - i \sin \frac{2\pi}{N} \quad (17)$$

として、\$X_k\$ にかける重み係数 \$W_N^{kl}\$ は、

$$W_N^{kl} = W_N^m = \left(e^{-i\frac{2\pi}{N}} \right)^m = \cos \frac{2\pi m}{N} - i \sin \frac{2\pi m}{N} \quad (18)$$

と表される。これを回転位相因子と言う。式 (16)、式 (18) を用いて、\$S = {}^t(S_0, S_1, \dots, S_{N-1})\$ を求めると、

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} \quad (19)$$

となる。回転位相因子 \$W_N^m\$ は複素数であるので、式 (19) から、DFT では \$N^2\$ 回の複素数の掛け算が必要であることが分かる。

2.2.3 FFT (高速フーリエ変換)

FFT (Fast Fourier Transform、高速フーリエ変換)^[2] は、回転位相因子 \$W_N^m\$ の指数性と周期性を利用して、DFT を高速に行うための手法であり、1965 年にクーリーとチュッキーによって提唱された。回転位相因子 \$W_N^m\$ の指数性から、任意の整数 \$n_1\$ (\$n_1 < m\$) を用いて、

$$W_N^m = W_N^{m-n_1} W_N^{n_1} \quad (20)$$

と表すことができる。また、回転位相因子 \$W_N^m\$ の周期性から、任意の整数 \$n_2\$ を用いて、

$$W_N^m = W_N^{m \pm n_2 N} \quad (21)$$

と表すことができる。\$N = 8\$ として \$S_5\$ を求めるとき、\$X_3\$ にかかる係数 \$W_8^{15}\$ は、式 (20)、式 (21) から、

$$\begin{aligned} W_8^{15} &= W_8^8 W_8^2 W_8^5 \quad (\text{指数性より}) \\ &= W_8^0 W_8^2 W_8^5 \quad (\text{周期性より}) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。このように、\$N^2\$ 個ある位相回転因子 \$W_N^m\$ をその指数性と周期性を利用して減らし、それらをうまく掛け合わせること (バタフライ演算) で、式 (19) の計算にかかる手間を大幅に軽減する。これが FFT である。バタフライ演算により、\$N^2\$ 回の複素数の掛け算は \$\frac{N}{2} \log_2 N\$ 回となる。図 2 にその様子を示す。図 2 から、式 (19) の複素数の掛け算の回数が大きく減少していることが分かる。

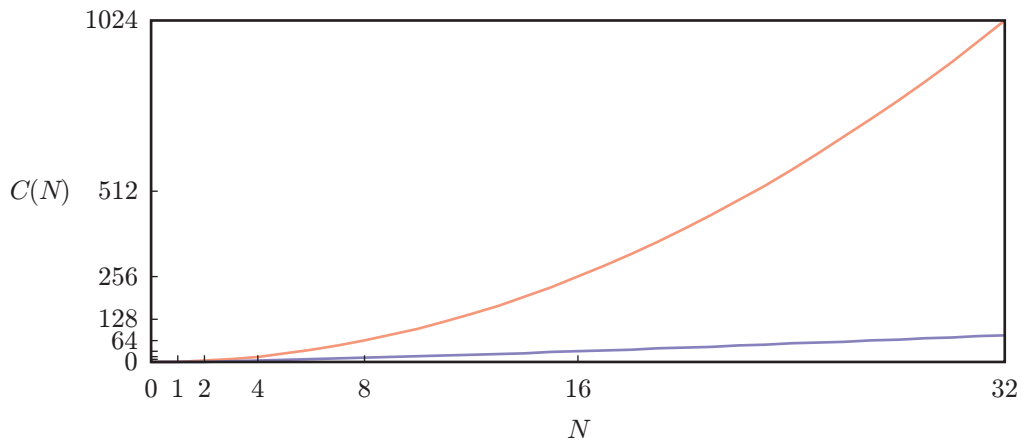


図 2: DFT と FFT の計算回数の比較。横軸はデータ数 N であり、縦軸は計算回数 $C(N)$ である。赤い曲線は DFT の計算回数を表し、青い曲線は FFT の計算回数を表す。

3 装置

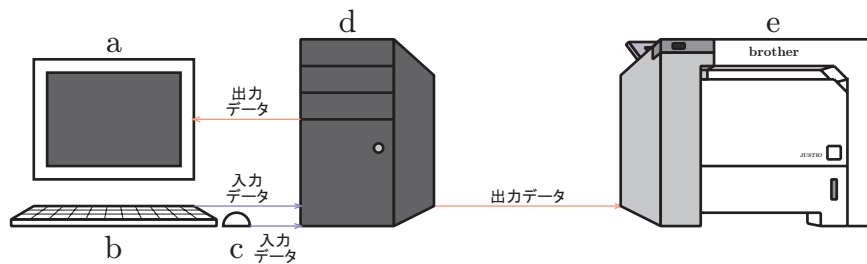


図 3: 装置構成図。装置は、(a) ディスプレイ、(b) キーボード、(c) マウス、(d) コンピューター、(e) プリンターからなる。

図 3 に、装置構成図を示す。図 3 に示したように、装置は、ディスプレイ、キーボード、マウス、コンピューター、プリンターからなる。ここで、コンピューターの OS は Windows (Windows7、または、WindowsXP) であり、数値解析用ソフトウェアには Windows7 の Origin、音声録音用ソフトウェアには WindowsXP のサウンドレコーダーを用いた。データは、キーボードやマウスから入力され、コンピューターにおいて演算処理がなされた後に、ディスプレイやプリンターによって出力される。

本解析では、次の文書データ (ASCII II のテキスト形式) と音声データ (WAV 形式) を用いた。

- 1Dfit.txt...ばねにおもりをつるしたときの、おもりの重さ W [g] に対するばねの長さ L [cm] の測定精度 0.2[cm] における測定結果^[4]。
- 3Ddata.txt...ピンホールを乗せた 2 つのステージを X 方向、 Y 方向へそれぞれ一定間隔ずつ移動させたときの、位置 (X [cm], Y [cm]) におけるピンホールを通過した X 線強度 Z の測定結果^[4]。
- single.txt...アルゴンランプが発する光を可視光波長範囲内で分光測定したときの、波長 X [nm] に対するカウント数 Y の測定結果^[4]。

- double.txt・・・アルゴンレーザー光 488[nm] の照射により励起されたルビーが発する赤色蛍光線を可視光波長範囲内で分光測定したときの、波長 X [nm] に対するカウント数 Y の測定結果^[4]。
- voice-16bit-44_1kHz.wav・・・サンプルサイズ 16[bit]、サンプルレート 44.1[kHz] として自分の声を録音したもの。
- onsa512-16bit-44_1kHz.wav・・・サンプルサイズ 16[bit]、サンプルレート 44.1[kHz] として 512[Hz] の音叉の音を録音したもの。
- onsa512-16bit-12kHz.wav・・・サンプルサイズ 16[bit]、サンプルレート 12.0[kHz] として 512[Hz] の音叉の音を録音したもの。
- onsa512-8bit-44_1kHz.wav・・・サンプルサイズ 8[bit]、サンプルレート 44.1[kHz] として 512[Hz] の音叉の音を録音したもの。
- onsa1024-16bit-44_1kHz.wav・・・サンプルサイズ 16[bit]、サンプルレート 44.1[kHz] として 1024[Hz] の音叉の音を録音したもの。
- onsa1024-16bit-12kHz.wav・・・サンプルサイズ 16[bit]、サンプルレート 12.0[kHz] として 1024[Hz] の音叉の音を録音したもの。
- onsa1024-8bit-44_1kHz.wav・・・サンプルサイズ 8[bit]、サンプルレート 44.1[kHz] として 1024[Hz] の音叉の音を録音したもの。
- white.wav・・・サンプル音 1。
- heart.wav・・・サンプル音 2。

4 解析手順

まず、解析を始める前に、次の手順でコンピューターとその周辺機器の準備を行った。

1. ディスプレイ（図 3(a)）とプリンター（図 3(e)）の電源が入っているか確認し、入っていないときはそれらの電源を入れた。
2. コンピューター（図 3(d)）を起動した。
3. コンピューターのデスクトップにおいて、「student data」フォルダ内に自分の名前を付けたフォルダ「野澤恵理花」を新しく作成した（これ以降、解析結果のファイル等は全て、「野澤恵理花」フォルダに保存した）。

次に、解析として、

- 数値データの解析
- Origin によるスペクトル解析

を行った。

4.1 数値データの解析手順

第3節で述べた文書データについて、Origin を用いて次の解析を行った。

- 1Dfit.txt の多項式フィット解析
- 3Ddata.txt のグラフ化
- single.txt のピークフィット解析
- double.txt の複数ピークフィット解析

以下、それらの手順について述べる。なお、1Dfit.txt については、手計算による解析も行った。

4.1.1 1Dfit.txt の多項式フィット解析手順

まず、以下のように数値データをグラフ化した。

1. タスクバーから Origin を開いた。
2. メニューの「ファイル」>「インポート」>「単一 ASCII ファイル」で 1Dfit.txt を選択し、1Dfit.txt の数値データを Origin のワークシートに表示した。
3. メニューの「作図」>「シンボル図」>「散布図」を選択し、おもりの重さ $W[g]$ を X 値、ばねの長さ $L[cm]$ を Y 値、長さの測定精度 $0.2[cm]$ を Y 値のエラー値に指定し、グラフを描いた。
4. プロット点を黒丸にし、 X 軸のラベルに「おもりの重さ $W(g)$ 」、 Y 軸のラベルに「ばねの長さ $L(cm)$ 」と書き込み、コメントに「おもりの重さ $W(g)$ とばねの長さ $L(cm)$ の関係」と書き込んだ。
5. メニューの「ファイル」>「印刷」を選択し、描いたグラフを印刷した。

次に、以下のように数値データの多項式フィットを行った。

1. 「解析」>「フィット」>「多項式フィット」を選択し、描いたグラフを一次式 $L = C_1 + C_2W$ に当てはめ、 C_1 と C_2 の最確値とその誤差を求めた。
2. 1 と同様に、描いたグラフを二次式 $L = C_1 + C_2W + C_3W^2$ に当てはめ、 C_1 、 C_2 、 C_3 の最確値とその誤差を求めた。

4.1.2 3Ddata.txt のグラフ化手順

以下のように数値データをグラフ化した。

1. タスクバーから Origin を開いた。
2. メニューの「ファイル」>「インポート」>「単一 ASCII ファイル」で 3Ddata.txt を選択し、3Ddata.txt の数値データを Origin のワークシートに表示した。
3. メニューの「ワークシート」>「行列に変換」>「直接」を選択し、ワークシートを行列化した。
4. メニューの「作図」>「等高線」>「XYZ 列等高線」を選択し、3Ddata.txt の二次元等高線グラフを描いた。
5. メニューの「作図」>「3D 曲面」>「色付き曲面」を選択し、3Ddata.txt の三次元グラフを描いた。
6. メニューの「ファイル」>「印刷」を選択し、描いた三次元グラフを印刷した。

4.1.3 single.txt のピークフィット解析手順

以下のように数値データのピークフィットを行った。

1. タスクバーから Origin を開いた。
2. メニューの「ファイル」>「インポート」>「単一 ASCII ファイル」で single.txt を選択し、single.txt の数値データを Origin のワークシートに表示した。
3. メニューの「作図」>「シンボル図」>「散布図」を選択し、single.txt のグラフを描いた。
4. ワークシートにおいてピークフィットを行う範囲の数値データを選択した後、メニューの「解析」>「ピークと基線」>「ピークアナライザー」を選択し、ピークアナライザ のダイアログを開いた。
5. 4 のダイアログの「基線モード」において、「定数」と「最小値」を選択した。
6. 4 のダイアログの「基線の処理」において、「基線の自動減算」を選択した。
7. 4 のダイアログの「ピークの検索」において、ピークを検索し、その中からピークを 1 つ選んだ。
8. 4 のダイアログの「ピークの検索」において、重み付けの「直接重み付け」を選択し、ピークフィットを行う範囲の数値データを選択した。
9. 4 のダイアログの「ピークの検索」において、「フィット制御」を選択し、「ピークフィットのパラメータ」ダイアログを開いた。
10. 9 のダイアログにおいて、モデル関数に「Gaussian」を選択し、「収束までフィット」を選択し、9 のダイアログを閉じた。
11. 4 のダイアログの「ピークの検索」において、「フィット実行」を選択し、数値データのピークフィットを行った。
12. 10 のモデル関数に「Lorentz」, 「PsdVoigt1」を選択した場合についても、1~11 と同様の手順で数値データのピークフィットを行った。

4.1.4 double.txt の複数ピークフィット解析手順

数値データの複数ピークフィットは、第 4.1.3 節の single.txt と同様の手順で行われるが、フィットを行うピークの数が増えるため、手順 7 が「4 のダイアログの「ピークの検索」において、ピークを検索し、その中からピークを 2 つ選んだ。」となる。

4.2 Origin によるスペクトル解析手順

第 3 節で述べた音声データ（一部）について、Origin を用いて解析を行った。まず、以下のように音叉の音と自分の声を録音した。

1. デスクトップからサウンドレコーダーを開いた。
2. マイクに向けて声を出しながら、サウンドレコーダーの録音ボタンを押した。2 秒程度録音したところで停止ボタンを押し、録音を終了した。

3. メニューの「ファイル」>「名前を付けて保存」を選択し、ファイル名を「voice-16bit-44.1kHz.wav」とし、形式を「PCM 44.1kHz, 16 ビット, モノラル」として、録音したデータを保存した。
4. 512[Hz]の音叉の音についても、1~3と同様の手順で録音し、保存した。ここで、形式を「PCM 44.1kHz, 16 ビット, モノラル」、「PCM 12.0kHz, 16 ビット, モノラル」、「PCM 44.1kHz, 8 ビット, モノラル」の3通りとし、ファイル名をそれぞれ、「onsa512-16bit-44.1kHz.wav」、「onsa512-16bit-12kHz.wav」、「onsa512-8bit-44.1kHz.wav」とした。
5. 1024[Hz]の音叉の音についても、1~3と同様の手順で録音し、保存した。ここで、形式を「PCM 44.1kHz, 16 ビット, モノラル」、「PCM 12.0kHz, 16 ビット, モノラル」、「PCM 44.1kHz, 8 ビット, モノラル」の3通りとし、ファイル名をそれぞれ、「onsa1024-16bit-44.1kHz.wav」、「onsa1024-16bit-12kHz.wav」、「onsa1024-8bit-44.1kHz.wav」とした。

次に、以下のように音声データをグラフ化し、スペクトル解析を行った（white.wav、heart.wav についてはスペクトル解析のみを行った）。

1. タスクバーから Origin を開いた。
2. メニューの「ファイル」>「インポート」>「音声 (WAV)」で voice-16bit-44.1kHz.wav を選択し、voice-16bit-44.1kHz.wav の数値化された音声データを Origin のワークシートに表示した。
3. メニューの「作図」>「線図」>「折れ線」を選択し、voice-16bit-44.1kHz.wav のグラフを描いた。
4. 5 周期分の波形が見えるようにグラフの横軸のスケールを調整した後、メニューの「ファイル」>「印刷」を選択し、描いたグラフを印刷した。
5. メニューの「解析」>「信号処理」>「FFT」>「FFT」を選択し、音声データのスペクトル解析を行った。
6. onsa512-16bit-44.1kHz.wav、onsa1024-16bit-44.1kHz.wav についても、1~5と同様の手順でグラフ化とスペクトル解析を行った。
7. white.wav、heart.wav についても 1、2、5と同様の手順でスペクトル解析を行った。

5 解析結果

5.1 1Dfit.txt の解析結果

5.1.1 手計算による解析結果

横軸をおもりの重さ W [g] とし、縦軸をばねの長さ L [cm] として、1Dfit.txt をグラフ化すると、プロットした点が直線状に並ぶことが分かる（図 4(a)）。これは、弾性力と重力がつり合っているとき、ばねの自然長を x_0 、ばね定数を k とし、重力加速度を g とすると、

$$k(L - x_0) - Wg = 0 \iff L = x_0 + \frac{g}{k}W \quad (23)$$

となり、ばねの伸び $L - x_0$ はおもりの重さ W に比例するからである。よって、ばねの長さ L とおもりの重さ W との関係は、次のようなモデル関数 $f(W)$ で表される。

$$L = f(W) = A_1 + A_2W \quad (24)$$

ここで、 A_1 と A_2 はパラメーターである。図 4(a) の各点を通る直線を目寸法で引き、その切片 A'_1 と傾き A'_2 を求めると、切片 A'_1 は $A'_1 = 12.57$ となり、傾き A'_2 は $A'_2 = 1.4$ となることが分かる。したがって、直線の方程式は、

$$L' = A'_1 + A'_2 W = 12.57 + 1.4W \quad (25)$$

となる。このとき、式 (4) から、残差の二乗和 S は $S = 57.16$ となり、式 (8) から、標準偏差 σ_{STD} の二乗は $\sigma_{STD}^2 = 4.083$ となる。残差の二乗和 S が大きく、標準偏差 σ_{STD} の二乗が 1 から大きくかけ離れていることから、式 (25) の直線の方程式は、ばねの長さ L の測定値をあまりうまく表せていないと考えられる²。

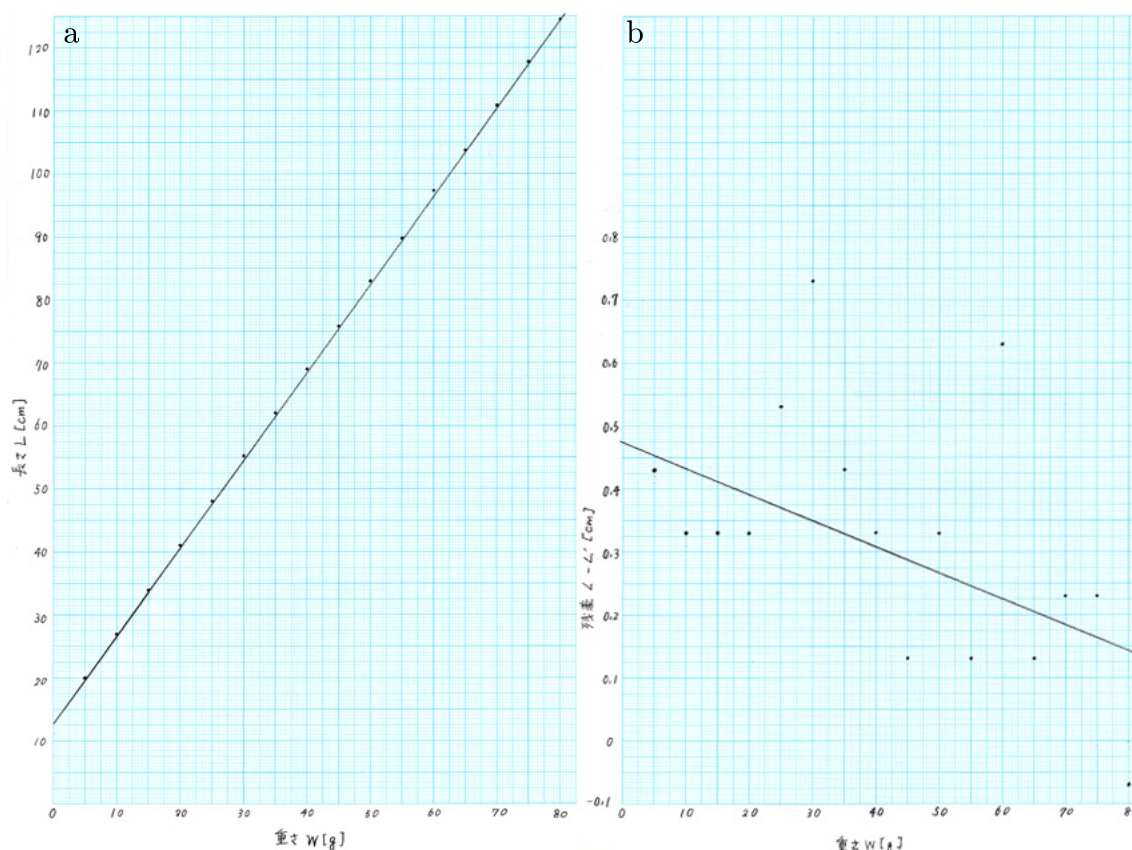


図 4: おもりの重さ W [g] に対する (a) ばねの長さ L [cm]、(b) 残差 $L - L'$ [cm]。横軸はおもりの重さ W [g]、縦軸は (a) ばねの長さ L [cm] であり、(b) 残差 $L - L'$ [cm] である。点は (a) ばねの長さ L の測定値、(b) 残差 $L - L'$ を表し、直線は (a) $L' = 12.57 + 1.4W$ 、(b) $L - L' = 0.475 - 0.00417W$ を表す。

より精度よくパラメーター A'_1 と A'_2 を求めたい。今、ばねの長さ L の測定値を最もよく表すパラメーター A_1 と A_2 に対して、式 (25) のパラメーター A'_1 と A'_2 が、

$$A'_i = A_i + \Delta A_i \quad (i = 1, 2) \quad (26)$$

を満たすとして、残差 $L - L'$ を求めると、

$$L - L' = (A_1 + A_2 W) - (A'_1 + A'_2 W) = (A_1 + A_2 W) - \{(A_1 + \Delta A_1) + (A_2 + \Delta A_2) W\}$$

²梅原先生に「直線が下過ぎるんじゃない？」とご指摘頂いたのですが、まさにその通りだったようです...(汗)

$$= -\Delta A_1 - \Delta A_2 W \quad (27)$$

となり、切片が $-\Delta A_1$ 、傾きが $-\Delta A_2$ の直線の方程式を与える。おもりの重さ W [g] に対する残差 $L - L'$ [cm] をプロットし、それらの点を通る直線を目寸法で引くと (図 4(b))、切片 $-\Delta A'_1$ は $-\Delta A'_1 = 0.475$ となり、傾き $-\Delta A'_2$ は $-\Delta A'_2 = -0.00417$ となることが分かる。よって、パラメーター A'_1 と A'_2 は、

$$A'_1 = A_1 - \Delta A'_1 = 12.57 + 0.475 = 13.045 \quad (28)$$

$$A'_2 = A_2 - \Delta A'_2 = 1.4 - 0.00417 = 1.39583 \quad (29)$$

となり、ばねの長さ L の測定値を表す直線の方程式 L'' は、

$$L'' = A'_1 + A'_2 W = 13.045 + 1.39583W \quad (30)$$

となる。このとき、式 (4) から、残差の二乗和 S は $S = 11.64$ となり、式 (8) から、標準偏差 σ_{STD} の二乗は $\sigma_{STD}^2 = 0.831$ となる。パラメーター A'_1 、 A'_2 の場合と比べると、残差の二乗和 S が 5 分の 1 程度まで小さくなり、標準偏差 σ_{STD} の二乗が 1 に非常に近いことから、式 (25) の直線の方程式よりも式 (30) の直線の方程式の方が、ばねの長さ L の測定値をうまく表せていると考えられる。残差 $L - L'$ のグラフを用いることで、より精度のよいパラメーター A'_1 、 A'_2 を求められることが分かった。

5.1.2 コンピューターによる解析結果

図 5 に、Origin で作成した、おもりの重さ W [g] に対するばねの長さ L [cm] のグラフを示す。図 5 に対して、一次式 $L = C_1 + C_2 W$ 、及び、二次式 $L = C_1 + C_2 W + C_3 W^2$ による多項式フィット解析を行った。図 6 に、多項式フィット解析により得られた一次式 $L = C_1 + C_2 W$ と二次式 $L = C_1 + C_2 W + C_3 W^2$ のグラフを示す。

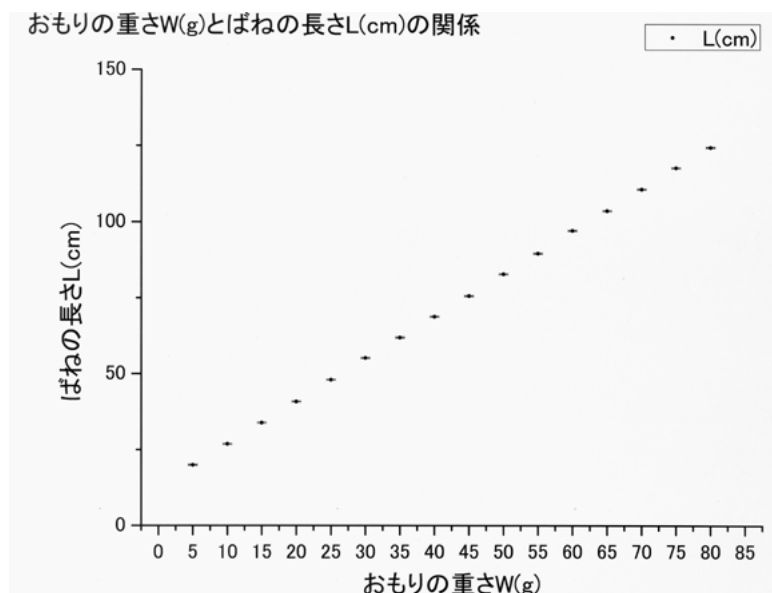


図 5: おもりの重さ W [g] に対するばねの長さ L [cm] のグラフ。横軸はおもりの重さ W [g] であり、縦軸はばねの長さ L [cm] である。小さな黒丸は測定値を表し、横線はエラーバーを表す。

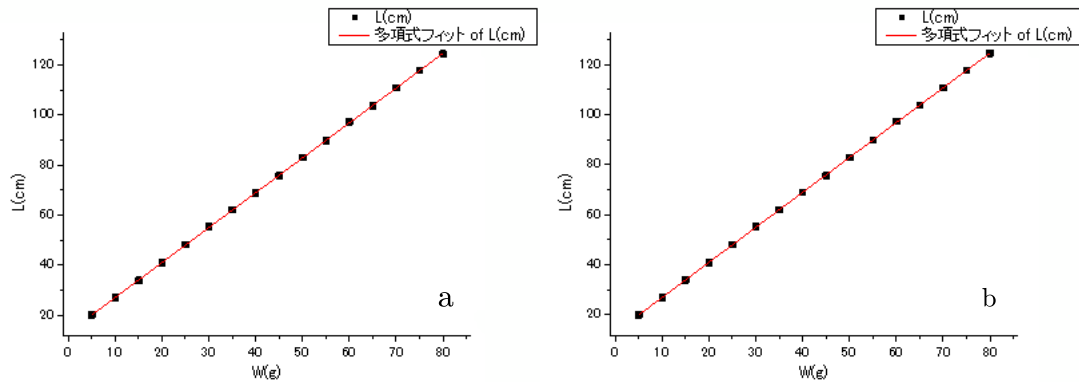


図 6: 多項式フィット解析により得られた (a) 一次式 $L = C_1 + C_2W$ と (b) 二次式 $L = C_1 + C_2W + C_3W^2$ のグラフ。横軸はおもりの重さ W [g] であり、縦軸はばねの長さ L [cm] である。小さな黒丸は測定値を表し、横線はエラーバーを表す。赤い線は (a) 一次式を表し、(b) 二次式を表す。

図 6(a) から、一次式 $L = C_1 + C_2W$ は測定値とよく一致していることが分かる。パラメーター C_1 の最確値は、

$$C_1 = 13.075 \pm 0.09452 \quad (31)$$

となり、パラメーター C_2 の最確値は、

$$C_2 = 1.39574 \pm 0.00195 \quad (32)$$

となる。このとき、式 (4) から、残差の二乗和 S は $S = 11.36951$ となり、式 (8) から、標準偏差 σ_{STD} の二乗は $\sigma_{STD}^2 = 0.8121$ となる。手計算による解析と比べると、コンピュータによる解析の方が、残差の二乗和 S では若干よく ($11.36951 < 11.64$) なっており、標準偏差 σ_{STD} の二乗では若干悪く ($0.8121 < 0.831 < 1$) なっている³。また、式 (7) より、赤池の情報量基準 AIC は、

$$AIC = S + 2 \times 2 = 15.36951 \quad (33)$$

となる。

図 6(b) から、二次式 $L = C_1 + C_2W + C_3W^2$ は測定値とよく一致してはいるが、殆ど一次式であるようにも見える。パラメーター C_1 の最確値は、

$$C_1 = 12.90982 \pm 0.14894 \quad (34)$$

となり、パラメーター C_2 の最確値は、

$$C_2 = 1.40675 \pm 0.00807 \quad (35)$$

となり、パラメーター C_3 の最確値は、

$$C_3 = -1.29552 \times 10^{-4} \pm 9.22395 \times 10^{-5} \quad (36)$$

となる。二次式 $L = C_1 + C_2W + C_3W^2$ は、重さ W が $W = -\frac{C_2}{2C_3} \sim 5429$ において極大値を持つことから、測定に用いた重さ W の範囲では、一次式的に振舞うことが分かる。このとき、式 (4) から、残差の二

³ 目寸法で引いた残差 $L - L'$ の直線が非常によかったためと思われます。人は、目寸法でフィッティングを行うとき、無意識に最小二乗法的な直線を引っ張っているようです。

乗和 S は $S = 9.87155$ となり、式 (8) から、標準偏差 σ_{STD} の二乗は $\sigma_{STD}^2 = 0.7593$ となり、式 (7) から、赤池の情報量基準 AIC は、

$$AIC = S + 2 \times 3 = 15.87155 \quad (37)$$

となる。式 (33) と式 (37) を比較すると、一次式の AIC の方が二次式の AIC よりも小さいため、一次式をモデル関数とする多項式フィットの方が測定値をよく表していることが分かる。

5.2 3Ddata.txt の解析結果

図 7(a) に、3Ddata.txt の二次元等高線グラフを示す。図 7(a) から、X 線強度は、X 方向への移動に関して、単一のピーク ($X \sim -0.53$) を持ち、Y 方向への移動に関して、3 つのピーク (最大のものは $Y \sim 0.45$) を持つことが分かる。図 7(b) に、3Ddata.txt の三次元グラフを示す。図 7(b) から、X 線強度は、X 方向への移動に関して、X の増加と共に単調に増加し、Y 方向への移動に関して、いくつものピーク (最大のものは $Y \sim 500$) を持つことが分かる。同じデータから得られた二次元等高線グラフと三次元グラフが、これほど異なった解析結果を与えるはずはなく、3Ddata.txt から予想すると、三次元グラフを作成する手順に誤りがあったのではないかと考えられる。

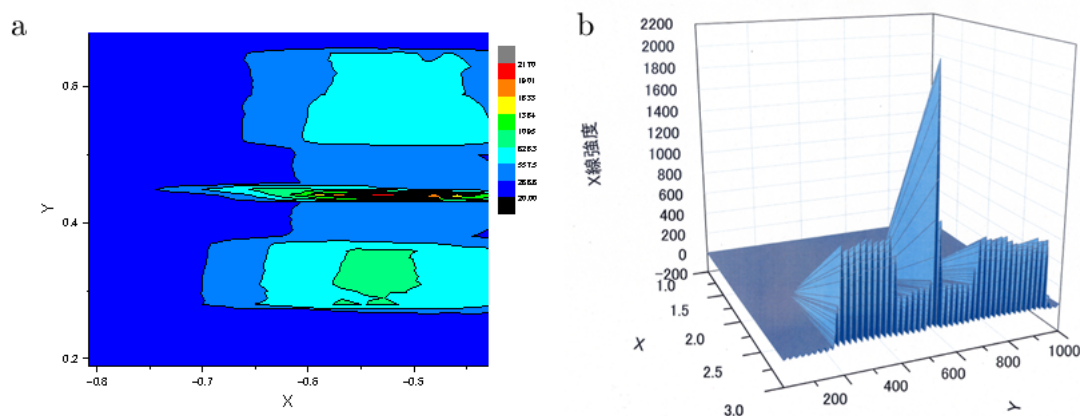


図 7: X 線強度の (a) 二次元等高線グラフと (b) 三次元グラフ。(a) X 軸は X 方向の位置、Y 軸は Y 方向の位置であり、X 線強度は色 (X 線強度: 小 大で色: 赤 青) で表される。(b) X 軸は不明、Y 軸は不明であり、Z 軸は X 線強度である。

5.3 single.txt の解析結果

図 8 に、アルゴンランプの波長 λ [nm] に対する分光測定のカウント数を示す。図 8 から、カウント数は 2 つのピークを持つことが分かる。この内、波長 λ が小さい方 ($694.81 \leq \lambda \leq 698.18$) のピークについてピークフィット解析を行う。ピークフィット解析には、次の 3 つのモデル関数を用いた。

- ガウス関数
- ローレンツ関数
- 疑似フォークト関数

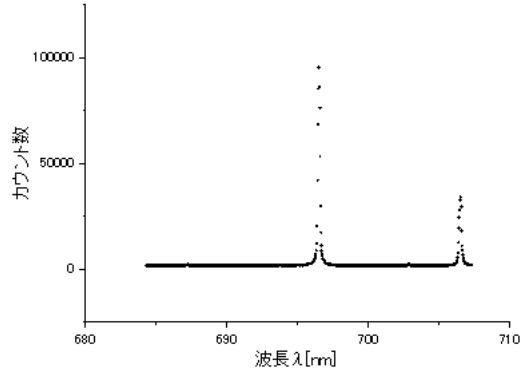


図 8: アルゴンランプの波長 λ [nm] に対する分光測定のカウント数。横軸は波長 λ [nm] であり、縦軸はカウント数である。

Origin において、 n 個のピークを持つガウス関数は、

$$y = f_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{w_i} \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi}} e^{-4 \ln 2 \frac{(x-x_{ci})^2}{w_i^2}} + y_0 \quad (38)$$

と定義され、ローレンツ関数は、

$$y = f_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{2A_i}{\pi} \frac{w_i}{4(x-x_{ci})^2 + w_i^2} + y_0 \quad (39)$$

と定義され、疑似フォークト関数は、

$$y = f_n(x) = \sum_{i=1}^n \left\{ \mu_i \frac{2A_i}{\pi} \frac{w_i}{4(x-x_{ci})^2 + w_i^2} + (1-\mu_i) \frac{A_i}{w_i} \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi}} e^{-4 \ln 2 \frac{(x-x_{ci})^2}{w_i^2}} \right\} + y_0 \quad (40)$$

と定義される。ここで、 A_i は i 番目のピークの面積、 w_i は i 番目のピークの半値幅、 x_{ci} は i 番目のピークの中心の座標、 μ_i は i 番目のピークのシェイプファクタであり、 y_0 は切片である。これらのモデル関数の評価には、カイ二乗値 χ^2 と AIC を用いた。カイ二乗値 χ^2 は、

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\{y_i - f_n(x_i)\}^2}{f_n(x_i)} \quad (41)$$

と定義される^[5]。ここで、 N はデータ数である。また、 AIC は、測定値の標準偏差 $\{\sigma_i\}$ が未知であるので、 $\sigma_i = \sqrt{y_i} = \sqrt{f_n(x_i)}$ を仮定し、式 (7)、式 (41) から、

$$AIC = \sum_{i=1}^N \frac{\{y_i - f_n(x_i)\}^2}{f_n(x_i)} + 2M = \chi^2 + 2M \quad (42)$$

とする。

図 9 に、ガウス関数によるピークフィット解析の結果を示す。図 9 から、測定値を表すガウス関数は、

$$y = f_1(x) = \frac{17402.70601}{0.17707} \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi}} e^{-4 \ln 2 \frac{(x-696.50644)^2}{(0.17707)^2}} + 777.65905 \quad (43)$$

となることが分かる。このとき、カイ二乗値 χ^2 は、式 (41) から、

$$\chi^2 = 1.12723 \times 10^5 \quad (44)$$

となり、 AIC は、式 (42) から、

$$AIC = 1.12723 \times 10^5 + 2 \times 4 = 1.12731 \times 10^5 \quad (45)$$

となる。

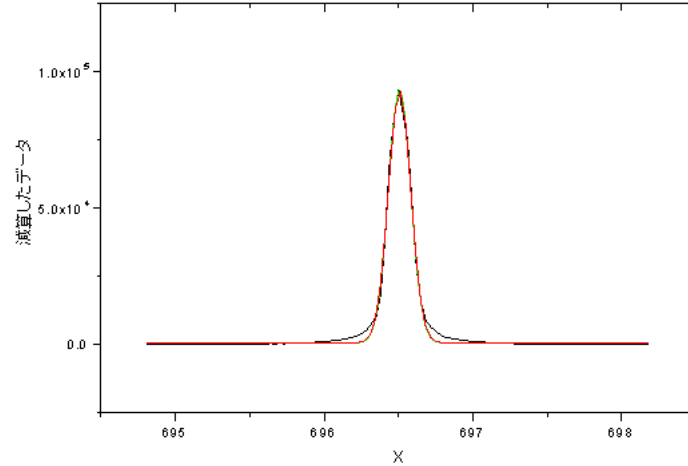


図 9: ガウス関数によるピークフィット解析の結果。横軸は波長 X ($694.81 \leq X \leq 698.18$) であり、縦軸は基線のカウンタ数 1702 を減算したカウンタ数である。黒い曲線は測定値を表し、赤い曲線はガウス関数を表す。

図 10 に、ローレンツ関数によるピークフィット解析の結果を示す。図 10 から、測定値を表すローレンツ関数は、

$$y = f_1(x) = \frac{2 \times 23931.28993}{\pi} \frac{0.15271}{4(x - 696.50556)^2 + (0.15271)^2} - 920.91983 \quad (46)$$

となることが分かる。このとき、カイ二乗値 χ^2 は、式 (41) から、

$$\chi^2 = 1.21701 \times 10^5 \quad (47)$$

となり、 AIC は、式 (42) から、

$$AIC = 1.21701 \times 10^5 + 2 \times 4 = 1.21709 \times 10^5 \quad (48)$$

となる。

図 11 に、疑似フォークト関数によるピークフィット解析の結果を示す。図 11 から、測定値を表す疑似フォークト関数は、

$$y = f_1(x) = 0.33208 \times \frac{2 \times 19795.8905}{\pi} \frac{0.17997}{4(x - 696.52442)^2 + (0.17997)^2} + (1 - 0.33208) \times \frac{19795.8905}{0.17997} \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi}} e^{-4 \ln 2 \frac{(x - 696.52442)^2}{(0.17997)^2}} + 191.10798 \quad (49)$$

となることが分かる。このとき、カイ二乗値 χ^2 は、式 (41) から、

$$\chi^2 = 3.96567 \times 10^4 \quad (50)$$

となり、 AIC は、式 (42) から、

$$AIC = 3.96567 \times 10^4 + 2 \times 5 = 3.96667 \times 10^4 \quad (51)$$

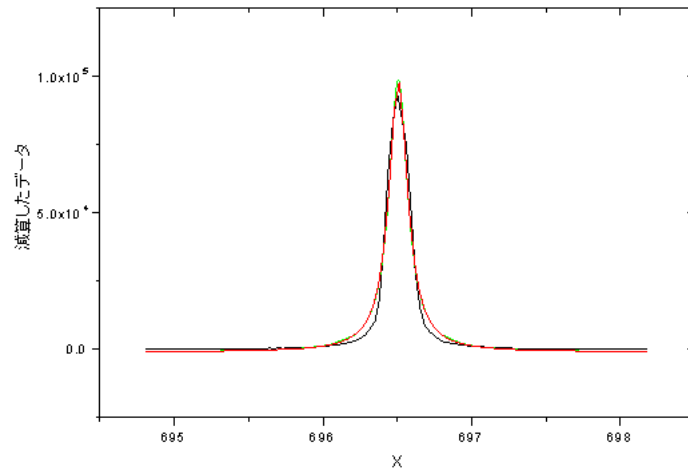


図 10: ローレンツ関数によるピークフィット解析の結果。横軸は波長 X ($694.81 \leq X \leq 698.18$) であり、縦軸は基線のカウンタ数 1702 を減算したカウンタ数である。黒い曲線は測定値を表し、赤い曲線はローレンツ関数を表す。

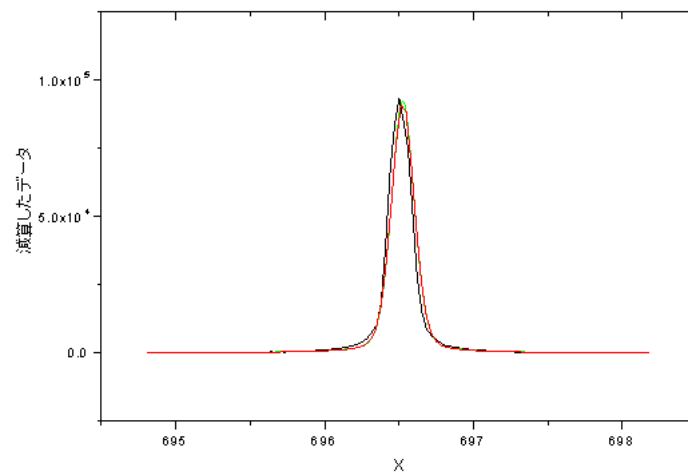


図 11: 疑似フォークト関数によるピークフィット解析の結果。横軸は波長 X ($694.81 \leq X \leq 698.18$) であり、縦軸は基線のカウンタ数 1702 を減算したカウンタ数である。黒い曲線は測定値を表し、赤い曲線は疑似フォークト関数を表す。

となる。

ピークフィット解析の結果をまとめると、式 (44)、式 (47)、式 (50) から、カイ二乗値 χ^2 は、ガウス関数では 1.12723×10^5 、ローレンツ関数では 1.21701×10^5 、疑似フォークト関数では 3.96567×10^4 となり、式 (45)、式 (48)、式 (51) から、 AIC は、ガウス関数では 1.12731×10^5 、ローレンツ関数では 1.21709×10^5 、疑似フォークト関数では 3.96667×10^4 となる。カイ二乗値 χ^2 、 AIC 共に、ガウス関数、ローレンツ関数、疑似フォークト関数の順に小さいことから、疑似フォークト関数が測定値のピークの形を最もよく表していることが分かる。

5.4 double.txt の解析結果

図 12 に、ルビーが発する赤色蛍光線の波長 $\lambda[\text{nm}]$ に対する分光測定のカウント数を示す。図 12 から、カウント数は 2 つのピークを持つことが分かる。これらのピークはとても接近しており、分離することが出来ないため、複数ピークフィット解析を行う。

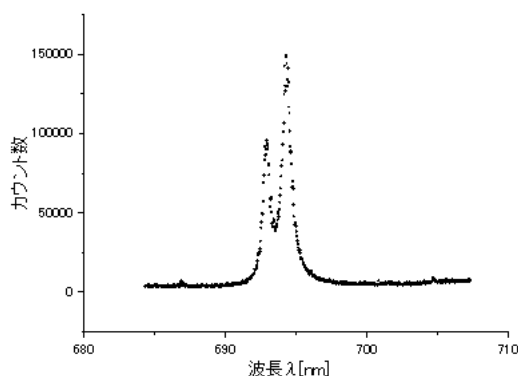


図 12: ルビーが発する赤色蛍光線の波長 $\lambda[\text{nm}]$ に対する分光測定のカウント数。横軸は波長 $\lambda[\text{nm}]$ であり、縦軸はカウント数である。

複数ピークフィット解析には、single.txt のときと同様に、次の 3 つのモデル関数を用いた。

- ガウス関数
- ローレンツ関数
- 疑似フォークト関数

図 13 に、ガウス関数による複数ピークフィット解析の結果を示す。図 13 から、測定値を表すガウス関数は、

$$y = f_2(x) = \frac{64241.50139}{0.74192} \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi}} e^{-4 \ln 2 \frac{(x-692.91375)^2}{(0.74192)^2}} + \frac{119391.50649}{0.90152} \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi}} e^{-4 \ln 2 \frac{(x-694.31603)^2}{(0.90152)^2}} + 2800.98153 \quad (52)$$

となることが分かる。このとき、カイ二乗値 χ^2 は、式 (41) から、

$$\chi^2 = 1.33225 \times 10^6 \quad (53)$$

となり、 AIC は、式 (42) から、

$$AIC = 1.33225 \times 10^6 + 2 \times 7 = 1.33227 \times 10^6 \quad (54)$$

となる。

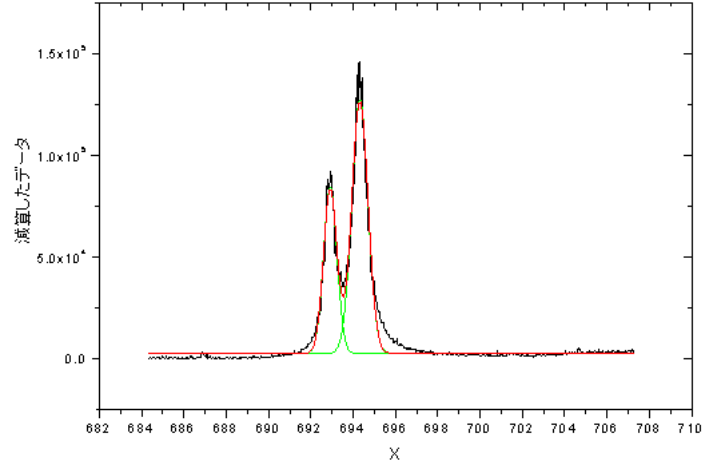


図 13: ガウス関数による複数ピークフィット解析の結果。横軸は波長 X であり、縦軸は基線のカウント数 3362 を減算したカウント数である。黒い曲線は測定値、緑の曲線は単一ピークのガウス関数を表し、赤い曲線は複数ピークのガウス関数を表す。

図 14 に、ローレンツ関数による複数ピークフィット解析の結果を示す。図 14 から、測定値を表すローレンツ関数は、

$$y = f_2(x) = \frac{2 \times 69952.54318}{\pi} \frac{0.52839}{4(x - 692.89214)^2 + (0.52839)^2} + \frac{2 \times 155104.39912}{\pi} \frac{0.72447}{4(x - 694.316)^2 + (0.72447)^2} + 1185.71192 \quad (55)$$

となることが分かる。このとき、カイ二乗値 χ^2 は、式 (41) から、

$$\chi^2 = 7.29660 \times 10^5 \quad (56)$$

となり、 AIC は、式 (42) から、

$$AIC = 7.29660 \times 10^5 + 2 \times 7 = 7.29674 \times 10^5 \quad (57)$$

となる。

図 15 に、疑似フォークト関数による複数ピークフィット解析の結果を示す。図 15 から、測定値を表す疑似フォークト関数は、

$$y = f_2(x) = 0.49106 \times \frac{2 \times 58065.31051}{\pi} \frac{0.58744}{4(x - 692.90998)^2 + (0.58744)^2} + (1 - 0.49106) \times \frac{58065.31051}{0.58744} \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi}} e^{-4 \ln 2 \frac{(x - 692.90998)^2}{(0.58744)^2}} + 1.07496 \times \frac{2 \times 163130.63907}{\pi} \frac{0.7246}{4(x - 694.28999)^2 + (0.7246)^2}$$

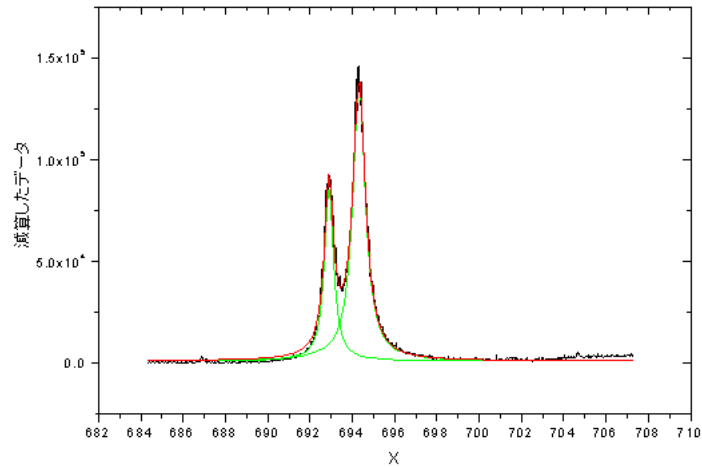


図 14: ローレンツ関数による複数ピークフィット解析の結果。横軸は波長 X であり、縦軸は基線のカウン
ト数 3362 を減算したカウント数である。黒い曲線は測定値、緑の曲線は単一ピークのローレンツ関数を表
し、赤い曲線は複数ピークのローレンツ関数を表す。

$$+ (1 - 1.07496) \times \frac{163130.63907}{0.7246} \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi}} e^{-4 \ln 2 \frac{(x-694.28999)^2}{(0.7246)^2}} + 1344.21847 \quad (58)$$

となることが分かる。このとき、カイ二乗値 χ^2 は、式 (41) から、

$$\chi^2 = 6.22912 \times 10^5 \quad (59)$$

となり、 AIC は、式 (42) から、

$$AIC = 6.22912 \times 10^5 + 2 \times 9 = 6.22930 \times 10^5 \quad (60)$$

となる。

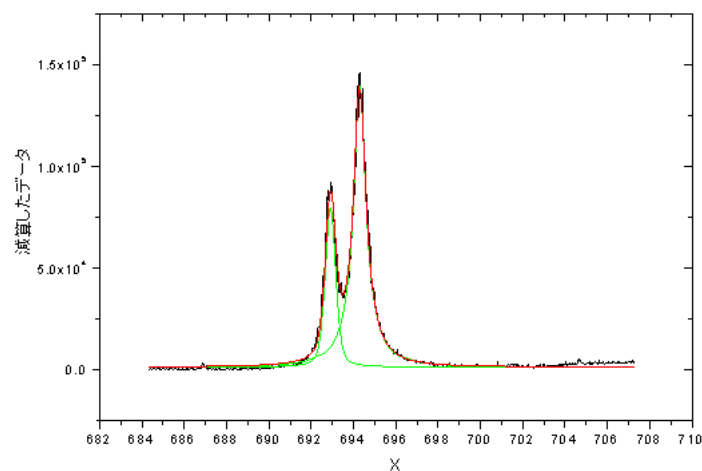


図 15: 疑似フーリエ関数による複数ピークフィット解析の結果。横軸は波長 X であり、縦軸は基線のカ
ウント数 3362 を減算したカウント数である。黒い曲線は測定値、緑の曲線は単一ピークの疑似フーリエ
関数を表し、赤い曲線は複数ピークの疑似フーリエ関数を表す。

複数ピークフィット解析の結果をまとめると、式 (53)、式 (56)、式 (59) から、カイ二乗値 χ^2 は、ガウス関数では 1.33225×10^6 、ローレンツ関数では 7.29660×10^5 、疑似フォークト関数では 6.22912×10^5 となり、式 (54)、式 (57)、式 (60) から、 AIC は、ガウス関数では 1.33227×10^6 、ローレンツ関数では 7.29674×10^5 、疑似フォークト関数では 6.22930×10^5 となる。カイ二乗値 χ^2 、 AIC 共に、ガウス関数、ローレンツ関数、疑似フォークト関数の順に小さいことから、疑似フォークト関数が測定値のピークの形を最もよく表していることが分かる。

5.5 自分の声と音叉の音の振幅スペクトル解析結果

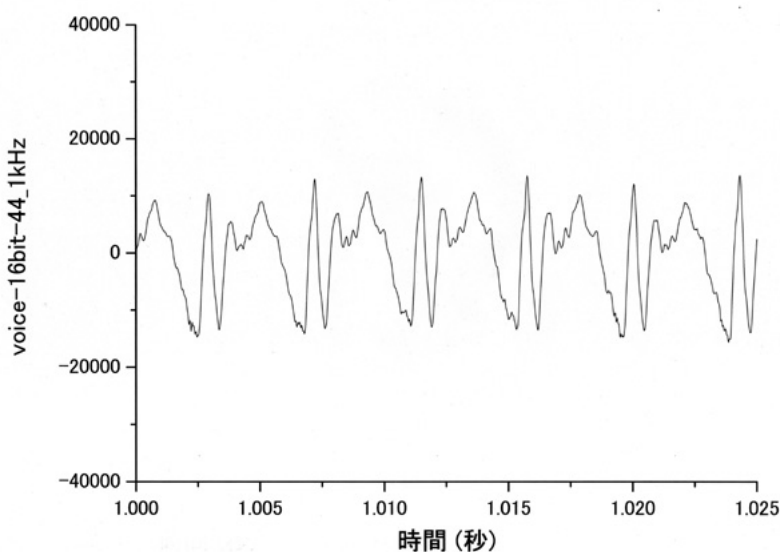


図 16: 自分の声の波形 5 周期分。横軸は時間 [秒] であり、縦軸は音量である。

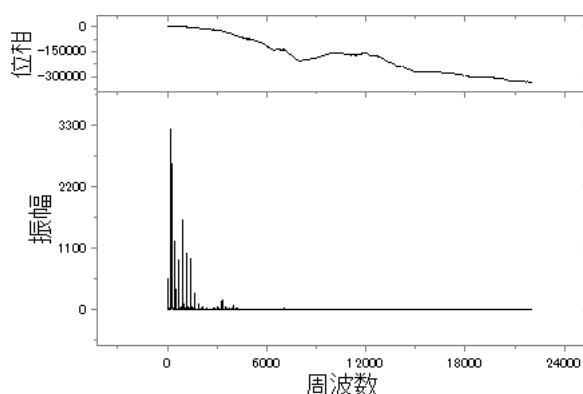


図 17: 自分の声の波形をフーリエ変換したときの振幅スペクトル。横軸は周波数 [Hz] であり、縦軸はフーリエ成分の振幅である。

図 16 に、自分の声の波形 5 周期分を示す。図 16 から、自分の声の波形は、様々な周波数の正弦波が、複数重ね合わさってできていることを予想させる。5 周期分の波形から周波数 f を大雑把に見積ると、5 周

期が 0.02125 秒程度であることから、 $f = \frac{5}{0.02125} \sim 235[\text{Hz}]$ となる。図 17 に、自分の声の波形をフーリエ変換したときの振幅スペクトルを示す。図 17 から、自分の声には様々な周波数が含まれていることが分かる。図 17 の最大ピークの位置から、自分の声に最も多く含まれる周波数 $\max f$ は $\max f = 232.95127[\text{Hz}]$ であることが分かる。これは、図 16 で大雑把に見積もった周波数 f とほぼ一致している。

図 18 に、512[Hz] の音叉の音の波形 5 周期分を示す。図 18 から、512[Hz] の音叉の音の波形は、ほぼ正弦波であることが分かる。5 周期分の波形から周波数 f を大雑把に見積もると、5 周期が 0.01 秒程度であることから、 $f = \frac{5}{0.01} = 500[\text{Hz}]$ 程度となる。図 19 に、512[Hz] の音叉の音の波形をフーリエ変換したときの振幅スペクトルを示す。図 19 から、振幅スペクトルにはいくつかの周波数が現れるが、これは、音叉以外の音やノイズによるものと思われる⁴。図 19 の最大ピークの位置から、512[Hz] の音叉に最も多く含まれる周波数 $\max f_1$ は $\max f_1 = 511.86372 \sim 512[\text{Hz}]$ である。

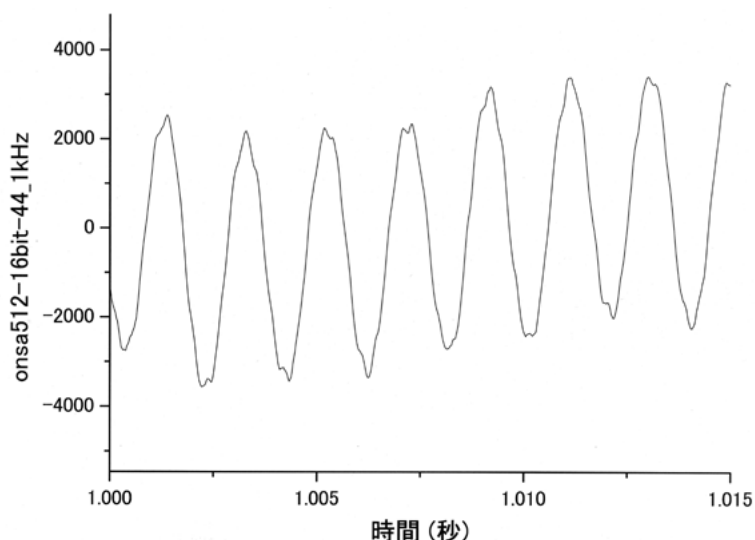


図 18: 512[Hz] の音叉の音の波形 5 周期分。横軸は時間 [秒] であり、縦軸は音量である。

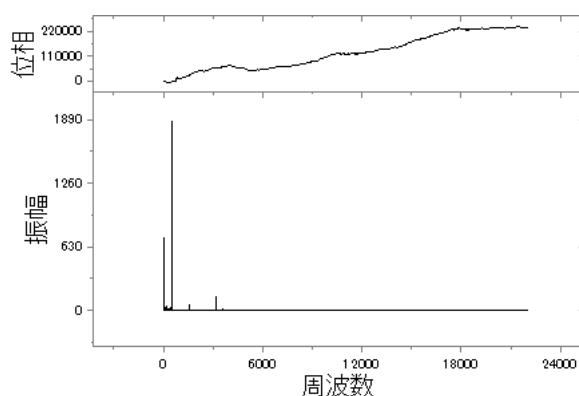


図 19: 512[Hz] の音叉の音の波形をフーリエ変換したときの振幅スペクトル。横軸は周波数 [Hz] であり、縦軸はフーリエ成分の振幅である。

⁴録音された音を聞くと、実際に音叉以外の音が聞こえます。

図 20 に、1024[Hz] の音叉の音の波形 5 周期分を示す。図 20 から、1024[Hz] の音叉の音の波形は、512[Hz] のときと比べ、より正弦波に近いことが分かる。5 周期分の波形から周波数 f を大雑把に見積ると、5 周期が 0.005 秒程度であることから、 $f = \frac{5}{0.005} = 1000[\text{Hz}]$ 程度となる。図 21 に、1024[Hz] の音叉の音の波形をフーリエ変換したときの振幅スペクトルを示す。図 21 の最大ピークの位置から、1024[Hz] の音叉に最も多く含まれる周波数 $\max f_2$ は $\max f_2 = 1024.19373 \sim 1024[\text{Hz}]$ である。

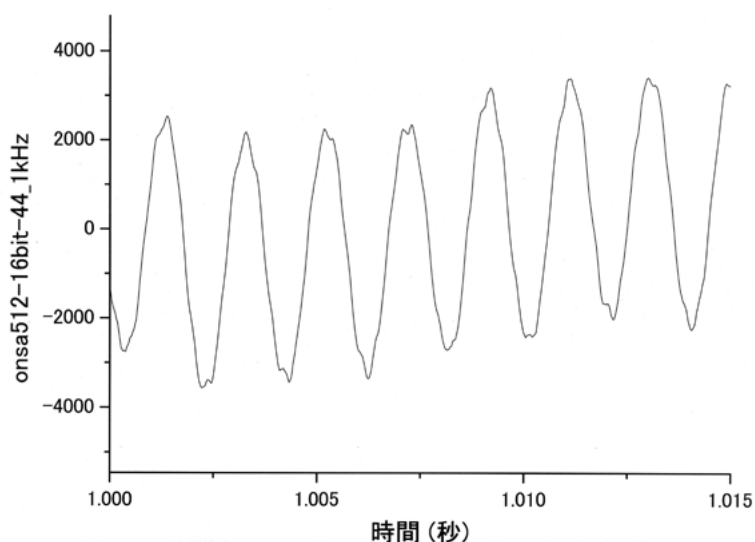


図 20: 1024[Hz] の音叉の音の波形 5 周期分。横軸は時間 [秒] であり、縦軸は音量である。

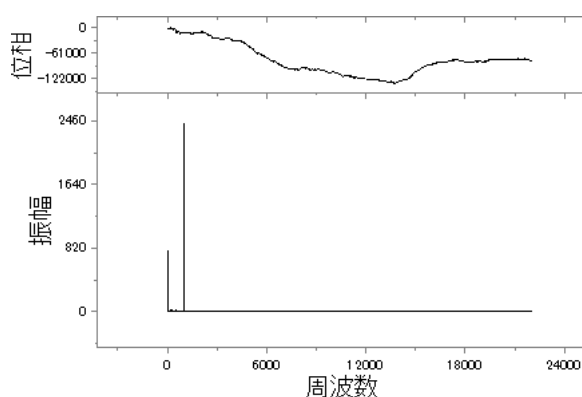


図 21: 1024[Hz] の音叉の音の波形をフーリエ変換したときの振幅スペクトル。横軸は周波数 [Hz] であり、縦軸はフーリエ成分の振幅である。

また、512[Hz] の音叉と 1024[Hz] の音叉では、音程が 1 オクターヴ異なるため、その周波数比は 1 : 2 となる^[6]。図 19 と図 21 から、512[Hz] の音叉と 1024[Hz] の音叉との周波数の比は、

$$\frac{\max f_2}{\max f_1} = \frac{1024.19373}{511.86372} = 2.000910965 \sim 2 \quad (61)$$

となり、 $\max f_1 : \max f_2 = 1 : 2$ であることが確かめられた。

5.6 white.wav と heart.wav の振幅スペクトル解析結果

white.wav は、ザーというノイズのような音の音声データである。図 22 に、white.wav の波形をフーリエ変換したときの振幅スペクトルを示す。図 22 から分かるように、自分の声や音叉の音の振幅スペクトルが数本だけのピークを持っていたのに対して、white.wav の振幅スペクトルは幅広い範囲の周波数に分布している。これより、white.wav は様々な周波数の音からなるホワイトノイズではないかと思われる。

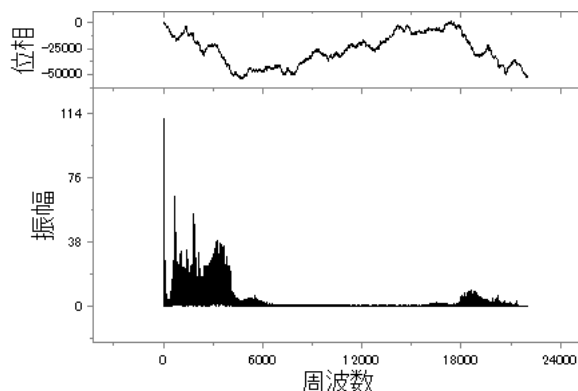


図 22: white.wav の波形をフーリエ変換したときの振幅スペクトル。横軸は周波数 [Hz] であり、縦軸はフーリエ成分の振幅である。

heart.wav は、ドクンドクンという心臓の拍動のような音の音声データである。図 23 に、heart.wav の波形をフーリエ変換したときの振幅スペクトルを示す。図 23 から分かるように、自分の声や音叉の音の振幅スペクトルが数本だけのピークを持っていたのに対して、heart.wav の振幅スペクトルは、周波数 f が $0 \leq f \leq 6000$ の範囲に分布しており、周波数が低くなるにつれて比較的たくさんのスペクトルが現れるようになる。

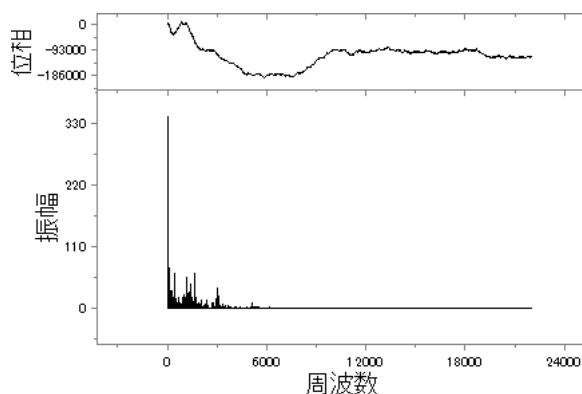


図 23: heart.wav の波形をフーリエ変換したときの振幅スペクトル。横軸は周波数 [Hz] であり、縦軸はフーリエ成分の振幅である。

5.7 音声データのパワースペクトル解析結果

パワースペクトルに関する考察は第 6 節において述べ、ここでは解析結果のみを示す。

図 24 に、自分の声の波形をフーリエ変換したときのパワースペクトルを示す。図 24 から分かるように、パワースペクトル $p(f)$ は、周波数 f が $20 \leq f \leq 4000$ の範囲において、たくさんのピーク（最大で $p(f) \sim 10^7$ ）を持つ。

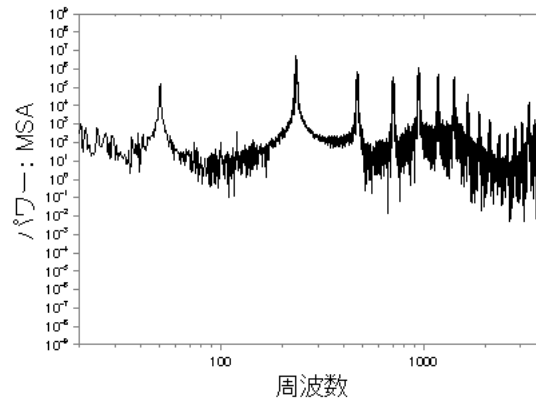


図 24: 自分の声の波形をフーリエ変換したときのパワースペクトル。横軸は周波数 f [Hz] ($20 \leq f \leq 4000$) であり、縦軸はパワースペクトル $p(f)$ ($10^{-9} \leq p(f) \leq 10^9$) である。

図 25 に、512[Hz] の音叉の音の波形をフーリエ変換したときのパワースペクトルを示す。図 25 から分かるように、パワースペクトル $p(f)$ は、周波数 f が $20 \leq f \leq 4000$ の範囲において、いくつかのピーク（最大で $p(f) \sim 10^6$ ）を持つ。

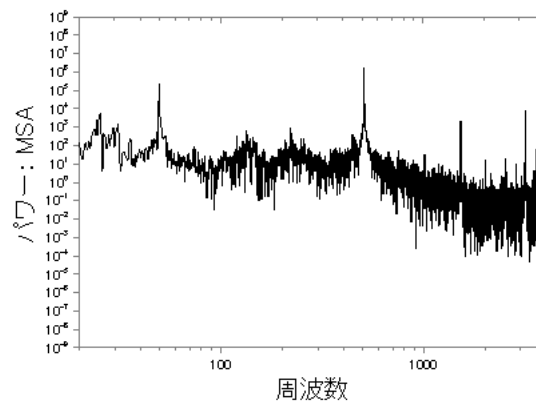


図 25: 512[Hz] の音叉の音の波形をフーリエ変換したときのパワースペクトル。横軸は周波数 f [Hz] ($20 \leq f \leq 4000$) であり、縦軸はパワースペクトル $p(f)$ ($10^{-9} \leq p(f) \leq 10^9$) である。

図 26 に、1024[Hz] の音叉の音の波形をフーリエ変換したときのパワースペクトルを示す。図 26 から分かるように、パワースペクトル $p(f)$ は、周波数 f が $20 \leq f \leq 4000$ の範囲において、2つのピーク（最大で $p(f) \sim 10^7$ ）を持つ。

図 27 に、white.wav の波形をフーリエ変換したときのパワースペクトルを示す。図 27 から分かるように、パワースペクトル $p(f)$ は、周波数 f が $20 \leq f \leq 4000$ の範囲において、大きなピークを持たず（最大で $p(f) \sim 10^3$ ）、周波数 f によらず一定の値を取る。

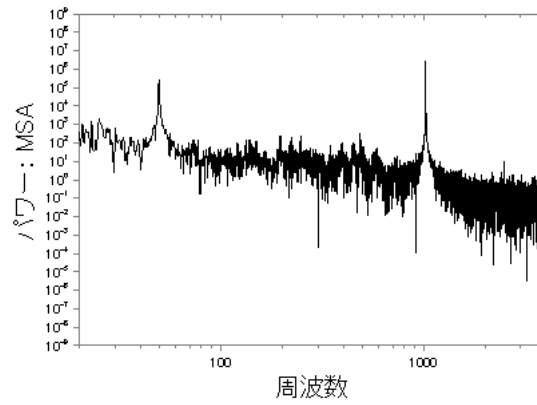


図 26: 1024[Hz] の音叉の音の波形をフーリエ変換したときのパワースペクトル。横軸は周波数 f [Hz] ($20 \leq f \leq 4000$) であり、縦軸はパワースペクトル $p(f)$ ($10^{-9} \leq p(f) \leq 10^9$) である。

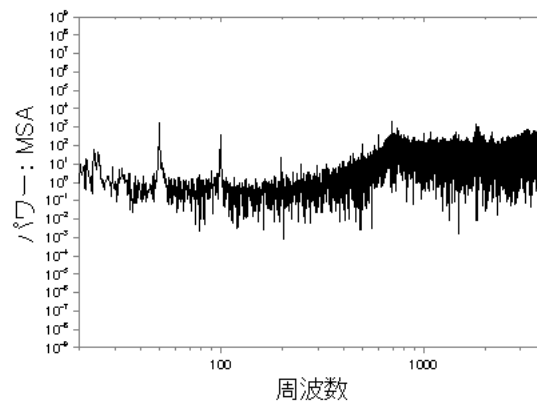


図 27: white.wav の波形をフーリエ変換したときのパワースペクトル。横軸は周波数 f [Hz] ($20 \leq f \leq 4000$) であり、縦軸はパワースペクトル $p(f)$ ($10^{-9} \leq p(f) \leq 10^9$) である。

図 28 に、heart.wav の波形をフーリエ変換したときのパワースペクトルを示す。図 28 から分かるように、パワースペクトル $p(f)$ は、周波数 f が $20 \leq f \leq 4000$ の範囲において、目立ったピークを持たず、周波数 f の増加に伴い単調に減少する。

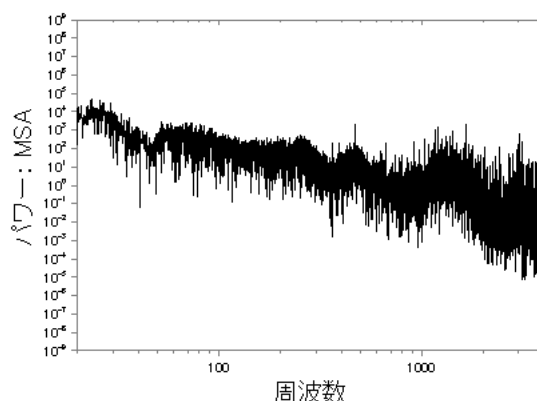


図 28: heart.wav の波形をフーリエ変換したときのパワースペクトル。横軸は周波数 f [Hz] ($20 \leq f \leq 4000$) であり、縦軸はパワースペクトル $p(f)$ ($10^{-9} \leq p(f) \leq 10^9$) である。

6 まとめと考察

第 5.1 節では、1Dfit.txt の数値データに対して、手計算による解析とコンピューターによる多項式フィット解析を行った。赤池の情報量規準 AIC を用いてモデル関数を評価したところ、おもりの重さ W に対するばねの長さ L は、 W の一次式によって最もよく表されることが分かった。第 5.2 節では、3Ddata.txt の数値データに対して、三次元グラフ化を行い、X 線強度の空間的な変化を視覚的に表した（ただし、同データに対する二次元等高線グラフとの比較から、三次元グラフ化の手順に誤りがあったと考えられる）。第 5.3 節では、single.txt の数値データに対して、ピークフィット解析を行った。カイ二乗値 χ^2 と赤池の情報量規準 AIC を用いて 3 つのモデル関数、ガウス関数、ローレンツ関数、擬似フォークト関数を評価したところ、アルゴンランプの波長に対する分光測定のカウント数は、擬似フォークト関数によって最もよく表されることが分かった。第 5.4 節では、double.txt の数値データに対して、複数ピークフィット解析を行った。カイ二乗値 χ^2 と赤池の情報量規準 AIC を用いて上記 3 つのモデル関数を評価したところ、ルビーが発する赤色蛍光線の波長に対する分光測定のカウント数は、アルゴンランプのときと同様に、擬似フォークト関数によって最もよく表されることが分かった。第 5.5 節では、自分の声、及び、512[Hz] と 1024[Hz] の音叉の音の音声データに対して、FFT による振幅スペクトル解析を行った。振幅スペクトルから、自分の声には様々な周波数が含まれていることが分かった。また、2 つの音叉共、その音はほぼ 1 つの周波数からなることが分かった。さらに、1 オクターヴ異なるそれらの音叉の音の周波数比を求め、振幅スペクトルの解析結果が正しく得られていることを確かめた。第 5.6 節では、white.wav と heart.wav の音声データに対して、FFT による振幅スペクトル解析を行った。white.wav、heart.wav の音は共に、自分の声や音叉の音とは異なり、様々な周波数を含んでいることが分かった。また、white.wav の振幅スペクトルは、周波数によらず値を持ち、heart.wav の振幅スペクトルは、周波数が低くなるにつれて増加することが分かった。第 5.7 節では、自分の声、512[Hz] と 1024[Hz] の音叉の音、white.wav、heart.wav に対して、FFT によるパワースペクトル解析を行った。自分の声や音叉のパワースペクトルは特定の周波数においてピークを持ち、

white.wav のパワースペクトルは周波数によらずほぼ一定の値を取り、heart.wav のパワースペクトルは周波数の増加に伴い減少することが分かった。

以下では、文献 [4] にある課題、

- 正弦波と矩形波のフーリエ変換
- 音のアナログ・デジタル変換
- 音声データのパワースペクトル

について考察する。

6.1 正弦波と矩形波のフーリエ変換

第 2.2 節で述べたように、フーリエ変換や FFT により、波形の周波数特性を理解することができる。ここでは、正弦波と矩形波をフーリエ変換し、それらの周波数特性を比較する。

まず、図 29(a) に示した角振動数 ω_0 の正弦波 $X(t)$ 、

$$X(t) = \sin \omega_0 t \quad (62)$$

のフーリエ変換を行う。正弦波 $X(t)$ のフーリエ成分 $S(\omega)$ は、式 (9) から、

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t \sin \omega t dt \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \{ \cos(\omega - \omega_0)t - \cos(\omega + \omega_0)t \} dt \quad (\sin \omega_0 t \cos \omega t \text{ は奇関数より } 0) \end{aligned} \quad (63)$$

となる。 $\omega \neq \omega_0$ のとき、 $\omega' = \omega - \omega_0$ とすると、式 (63) の第一項から、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega' t dt &= \int_{-\infty + \frac{\pi}{2\omega'}}^{\infty + \frac{\pi}{2\omega'}} \cos \omega' \left(\tau - \frac{\pi}{2\omega'} \right) \frac{d\left(\tau - \frac{\pi}{2\omega'} \right)}{d\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left(\omega' \tau - \frac{\pi}{2} \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega' \tau d\tau = 0 \end{aligned} \quad (64)$$

となる。ここで、 $t = \tau - \frac{\pi}{2\omega'}$ とした。 $\omega = \omega_0$ のとき、式 (63) の第一項から、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos 0 dt = \infty \quad (65)$$

となる。よって、式 (63) の第一項は、

$$-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega - \omega_0)t dt = -\frac{i}{2} \delta(\omega - \omega_0) \quad (66)$$

となる。同様にして、式 (63) の第二項は、

$$\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega + \omega_0)t dt = \frac{i}{2} \delta(\omega + \omega_0) \quad (67)$$

となる。よって、式 (63) は、

$$S(\omega) = -\frac{i}{2} \{ \delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0) \} \quad (68)$$

となり、角振動数 ω_0 の正弦波 $X(t)$ のフーリエ変換は、 $\omega = \pm\omega_0$ のみにピークを持つことが分かる。図 29(b) に、正弦波 $X(t)$ のフーリエ成分 $S(\omega)$ を示す。

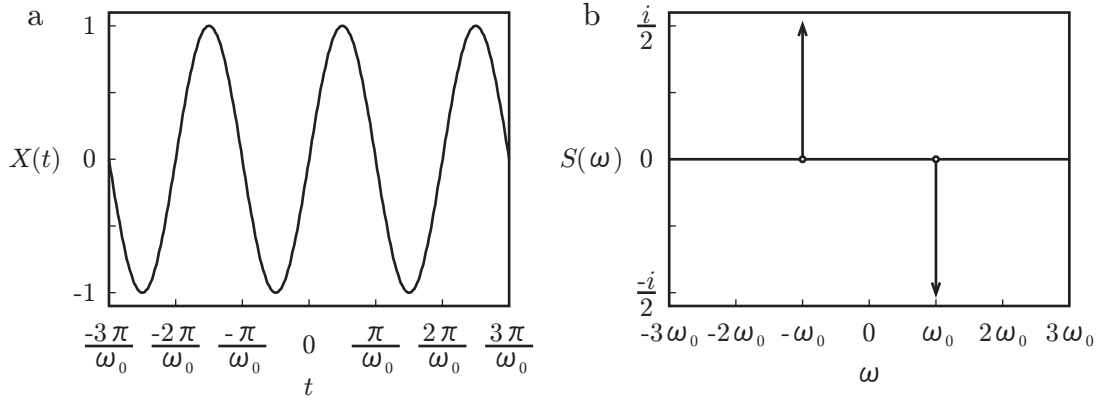


図 29: 正弦波 $X(t)$ のフーリエ変換。(a) 正弦波 $X(t)$ 、(b) 正弦波のフーリエ成分 $S(\omega)$ 。(a) 横軸は時刻 t であり、縦軸は正弦波 $X(t)$ である。(b) 横軸は角振動数 ω であり、縦軸はフーリエ成分 $S(\omega)$ である。

次に、図 30(a) に示した周期 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ の矩形波 $X(t)$ 、

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \cdots & 2l\frac{\pi}{\omega_0} \leq t < (2l+1)\frac{\pi}{\omega_0} \\ -1 & \cdots & (2l-1)\frac{\pi}{\omega_0} \leq t < 2l\frac{\pi}{\omega_0} \end{cases} \quad (l = \cdots, -1, 0, 1, \cdots) \quad (69)$$

のフーリエ変換を行う。初めに、式 (69) をフーリエ級数展開する。式 (69) から、 $X(t + \frac{2\pi}{\omega_0}) = X(t)$ となるので、1 波形分のフーリエ級数展開を考えればよい。以下、 $l = 0$ の矩形波、

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \cdots & 0 \leq t < \frac{\pi}{\omega_0} \\ -1 & \cdots & -\frac{\pi}{\omega_0} \leq t < 0 \end{cases} \quad (70)$$

をフーリエ級数展開する。式 (70) のフーリエ級数展開は、

$$X(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (71)$$

となる。ここで、

$$a_0 = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} X(t) dt = \frac{\omega_0}{\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^0 (-1) dt + \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} 1 dt \right\} = \frac{\omega_0}{\pi} \left(-\frac{\pi}{\omega_0} + \frac{\pi}{\omega_0} \right) = 0 \quad (72)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} X(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{\omega_0}{\pi} \left(- \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^0 \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} \cos n\omega_0 t dt \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} (-\sin n\pi + \sin n\pi) = 0 \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} X(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{\omega_0}{\pi} \left(- \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^0 \sin n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} \sin n\omega_0 t dt \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \cdots & n = 2k \\ \frac{4}{n\pi} & \cdots & n = 2k - 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots) \end{aligned} \quad (74)$$

となるので、これらを式 (71) に代入すると、

$$X(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\omega_0 t}{2k-1} \quad (75)$$

となる。式 (69) のフーリエ変換は、式 (9) から、

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\omega_0 t}{2k-1} \right\} e^{-i\omega t} dt = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2k-1)\omega_0 t e^{-i\omega t} dt \\
 &= -\frac{2i}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} [\delta\{\omega - (2k-1)\omega_0\} - \delta\{\omega + (2k-1)\omega_0\}] \quad (76)
 \end{aligned}$$

となり、 $\omega = \pm(2k-1)\omega_0$ ($k = 1, 2, \dots$) にピークを持つことが分かる。図 30(b) に、矩形波 $X(t)$ のフーリエ成分 $S(\omega)$ を示す。

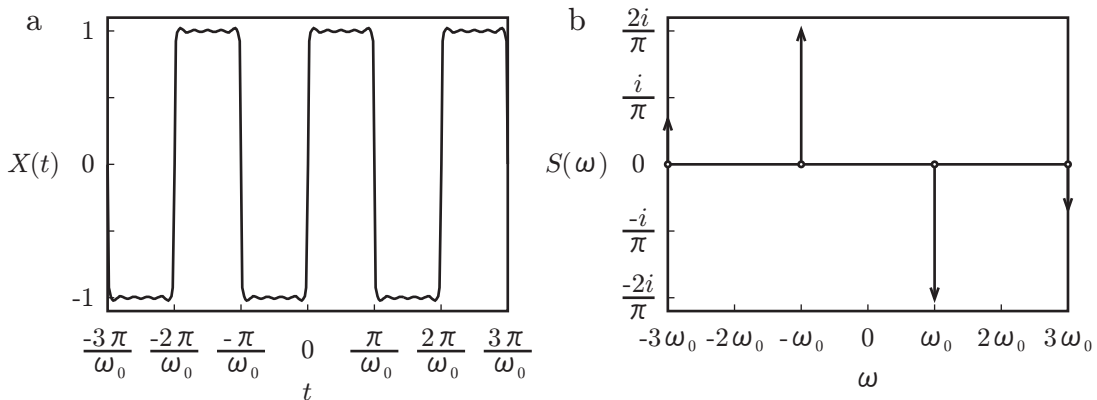


図 30: 矩形波 $X(t)$ のフーリエ変換。(a) 矩形波 $X(t)$ 、(b) 矩形波のフーリエ成分 $S(\omega)$ 。(a) 横軸は時刻 t であり、縦軸は矩形波 $X(t)$ である。(b) 横軸は角振動数 ω であり、縦軸はフーリエ成分 $S(\omega)$ である。

式 (68) と式 (76) を比較すると、正弦波のフーリエ変換は $\omega = \pm\omega_0$ に 2 つのピークのみを持つが、矩形波のフーリエ変換は $\omega = \pm(2k-1)\omega_0$ ($k = 1, 2, \dots$) に無数のピークを持つことが分かる。正弦波と矩形波は、共に周期が $\frac{2\pi}{\omega_0}$ であることから、単一の角振動数 ω_0 のみからなるように思われるが、フーリエ変換によって、正弦波は 1 つの角振動数 ω_0 のみを持つのに対し、矩形波は角振動数 ω_0 を含む様々な角振動数を持つことが分かる。何故このような差が現れたのであろうか。矩形波のフーリエ級数展開による定義 (式 (75)) から明らかなように、その違いは 2 つの波形の形の違いによるものと考えられる。四角い矩形波を作るには、式 (75) に基づいてたくさんの正弦波を重ねなくてはならず、これがフーリエ変換を施した際に、様々な角振動数となって現れたのである。

6.2 音のアナログ・デジタル変換

音叉の音については、サンプルレートやサンプルサイズが異なる音声データを用意した。アナログの音をデジタルの音に変換するとき、標本化と量子化を行う。図 31 に、アナログの音に対する標本化と量子化の過程を示す。標本化では、図 31(b) のように、図 31(a) のアナログ波形 $X(t)$ から時間間隔 Δt ごとの音量をサンプリングすることで、アナログ波形を時間方向に離散化する。このとき、時間間隔 Δt の逆数を取ったものをサンプリングレートと言う。例えば、onsa512-16bit-44.1kHz.wav、onsa1024-16bit-44.1kHz.wav はサンプリングレートが 44.1[kHz] であり、onsa512-16bit-12kHz.wav、onsa1024-16bit-12kHz.wav はサンプリングレートが 12.0[kHz] である。サンプリングレートが 44.1[kHz] のとき、サンプリングの時間間隔は $1/(44.1 \times 10^3) = 2.27 \times 10^{-5}$ [s] となり、サンプリングレートが 12.0[kHz] のとき、サンプリングの時間間隔は $1/(12.0 \times 10^3) = 8.33 \times 10^{-5}$ [s] となる。サンプリングレートが大きいほど、短い時間間隔でサン

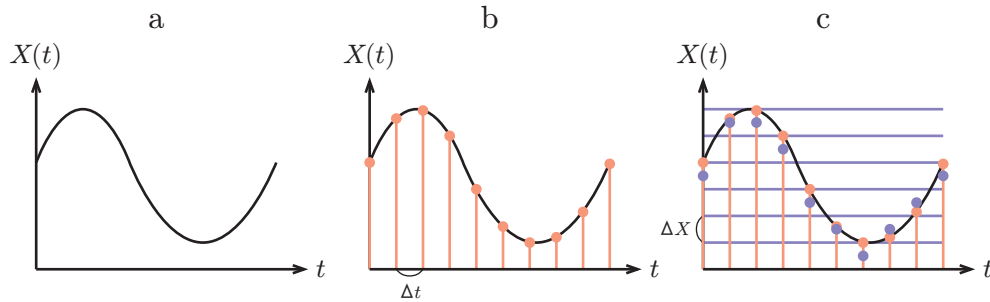


図 31: アナログの音に対する標本化と量子化の過程。(a) アナログ波形、(b) 標本化、(c) 量子化。横軸は時間 t であり、縦軸は音量 $X(t)$ である。赤い線は時間間隔 Δt 、赤い点は時間間隔 Δt ごとに標本化された音、青い線はセルの幅 ΔX を表し、青い点はセルの幅 ΔX ごとに量子化された音を表す。

プリングするため、高い周波数の音のサンプリングも可能である。実際に、onsa512-16bit-44_1kHz.wav と onsa512-16bit-12kHz.wav とを聴き比べてみると、サンプリングレートが 12[kHz] の方が音がこもって聴こえる（音叉の音がノイズ音に埋もれて聴こえにくい）。

量子化では、図 31(c) のように、図 31(b) で標本化した波形を幅 ΔX のセルごとに振り分け、各セルに 1 つの値を割り当てることで、標本化した波形を音量方向に離散化する。このとき、振り分けるセルの数の \log_2 を取ったものをサンプリングサイズと言う。例えば、onsa512-16bit-44_1kHz.wav、onsa1024-16bit-44_1kHz.wav はサンプリングサイズが 16[bit]（セル数は $2^{16} = 65536$ 個）であり、onsa512-8bit-44_1kHz.wav、onsa1024-8bit-44_1kHz.wav はサンプリングサイズが 8[bit]（セル数は $2^8 = 256$ 個）である。サンプリングサイズが 8[bit] のときと 16[bit] のときでは、データのサイズ（情報量）が 2 倍になる。実際に、onsa512-8bit-44_1kHz.wav はファイルサイズが 110[KB]、onsa512-16bit-44_1kHz.wav はファイルサイズが 219 ~ 2×110 [KB]、onsa1024-8bit-44_1kHz.wav はファイルサイズが 106[KB] であり、onsa1024-16bit-44_1kHz.wav はファイルサイズが 211 ~ 2×106 [KB] である。サンプリングサイズが大きいほど、細かい間隔で音量を量子化できるため、音量の僅かな変化を表現できる。

6.3 音声データのパワースペクトル

美空ひばりさんや宇多田ヒカルさんなど、一部の人の声は $1/f$ 揺らぎを持っていると言われている^[7]。そこで、自分の声のパワースペクトルにも $1/f$ 揺らぎがあるかどうかを確かめる。図 32 に、周波数 f が $20 < f < 40$ の範囲における自分の声のパワースペクトルとその回帰直線を示す。図 32 の回帰直線から、パワースペクトル $p(f)$ の推定値 $\hat{p}(f)$ は、

$$\log_{10} \hat{p}(f) = -3.4496 \log_{10} f + 6.7424 \iff \hat{p}(f) = 10^{6.7424} f^{-3.4496} \quad (77)$$

となる。ここで、残差 $\log_{10} p(f) - \log_{10} \hat{p}(f)$ の二乗和は 15.2 である。 $\hat{p}(f) \propto f^{-3.4} \neq f^{-1}$ より、自分の声には、美空ひばりさんのような $1/f$ 揺らぎは無いことが確かめられた。

図 33 に、周波数 f が $100 < f < 200$ の範囲における white.wav のパワースペクトルとその回帰直線を示す。図 33 の回帰直線から、パワースペクトル $p(f)$ の推定値 $\hat{p}(f)$ は、

$$\log_{10} \hat{p}(f) = -0.0756 \log_{10} f + 0.0006 \iff \hat{p}(f) = 10^{0.0006} f^{-0.0756} \quad (78)$$

となる。ここで、残差 $\log_{10} p(f) - \log_{10} \hat{p}(f)$ の二乗和は 28.8 である。 $\hat{p}(f) \propto f^{-0.1} \sim f^0$ であり、パワースペクトル $p(f)$ が周波数 f の値によらず一様に分布していることから、white.wav はホワイトノイズであると考えられる。

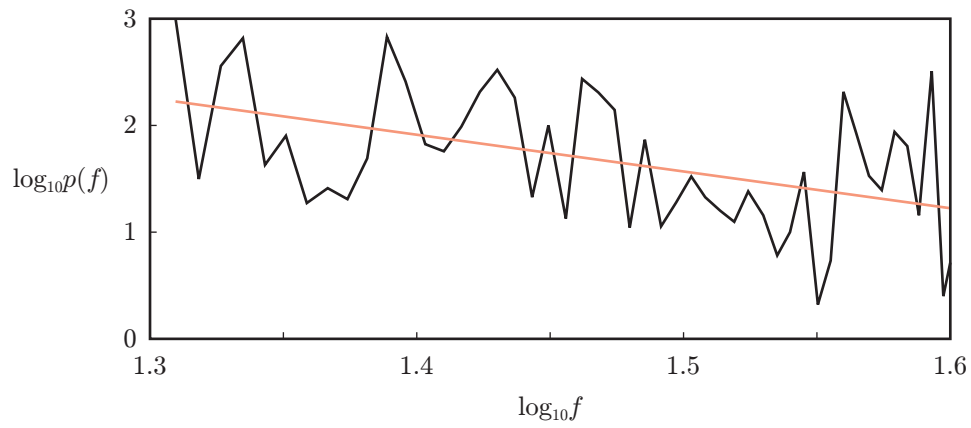


図 32: 周波数 f が $20 < f < 40$ の範囲における自分の声のパワースペクトルとその回帰直線。横軸は $\log_{10} f$ であり、縦軸は $\log_{10} p(f)$ である。赤い直線はパワースペクトルの回帰直線を表す。

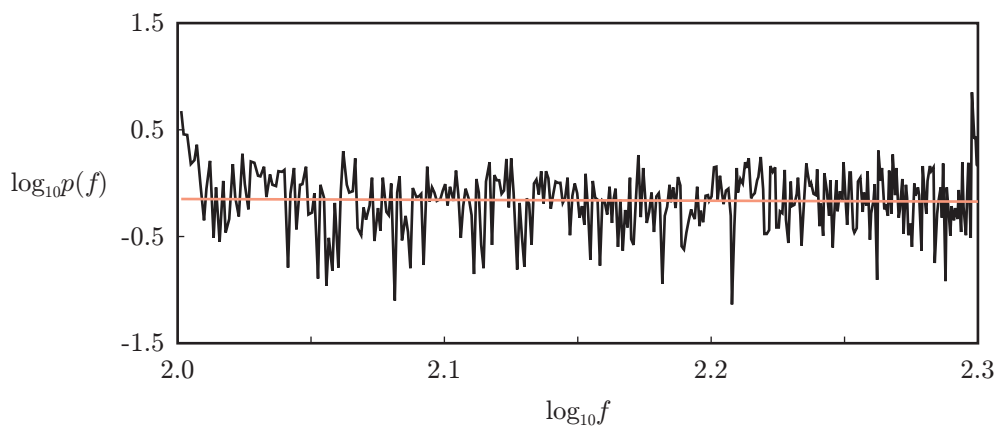


図 33: 周波数 f が $100 < f < 200$ の範囲における white.wav のパワースペクトルとその回帰直線。横軸は $\log_{10} f$ であり、縦軸は $\log_{10} p(f)$ である。赤い直線はパワースペクトルの回帰直線を表す。

図 34 に、周波数 f が $60 \leq f \leq 200$ の範囲における heart.wav のパワースペクトルとその回帰直線を示す。図 34 の回帰直線から、パワースペクトル $p(f)$ の推定値 $\hat{p}(f)$ は、

$$\log_{10} \hat{p}(f) = -1.1778 \log_{10} f + 4.2747 \iff \hat{p}(f) = 10^{4.2747} f^{-1.1778} \quad (79)$$

となる。ここで、残差 $\log_{10} p(f) - \log_{10} \hat{p}(f)$ の二乗和は 499.5 である。 $\hat{p}(f) \propto f^{-1.2} \sim f^{-1}$ であり、パワースペクトル $p(f)$ が周波数 f に反比例して減少する分布をしていることから、heart.wav には $1/f$ 揺らぎが含まれているものと思われる。心臓の拍動には $1/f$ 揺らぎが含まれているという報告があり [7]、heart.wav は心臓の拍動の音ではないかと思われる。

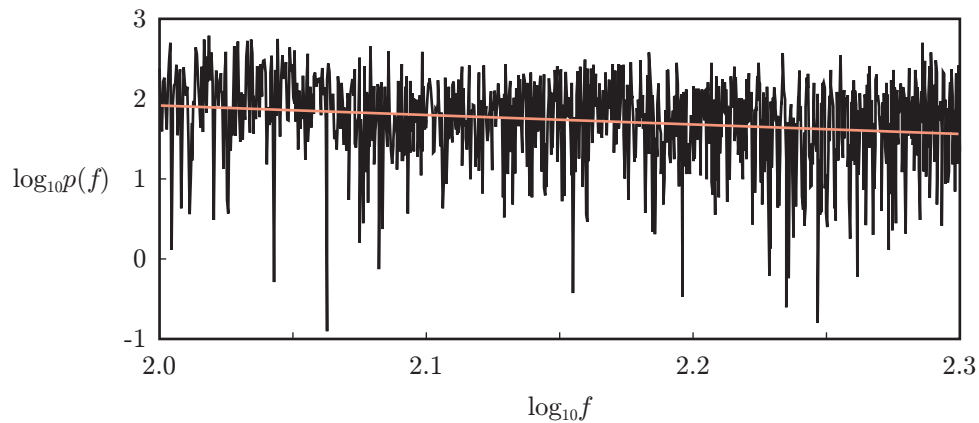


図 34: 周波数 f が $60 \leq f \leq 200$ の範囲における heart.wav のパワースペクトルとその回帰直線。横軸は $\log_{10} f$ であり、縦軸は $\log_{10} p(f)$ である。赤い直線はパワースペクトルの回帰直線を表す。

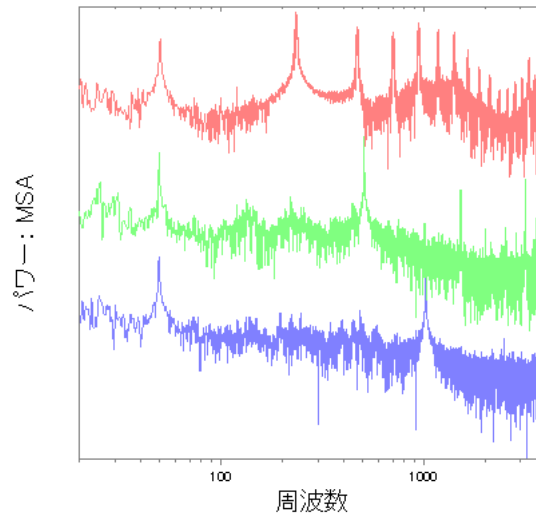


図 35: 自分の声と音叉の音のパワースペクトル。横軸は周波数 [Hz] である。赤い線は自分の声のパワースペクトル、緑の線は 512[Hz] の音叉の音のパワースペクトルであり、青い線は 1024[Hz] の音叉の音のパワースペクトルである。自分の声と音叉の音のパワースペクトルは、50[Hz] において全てピークを持っている。

また、図 24、図 25、図 26 から、自分の声と音叉の音のパワースペクトルは全て、周波数 f が $f \sim 50[\text{Hz}]$ においてピークを持っているように見える。図 35 に、自分の声と音叉の音のパワースペクトルを同じ横軸上（周波数軸上）で縦に並べたグラフを示す。図 35 から、自分の声と音叉の音のパワースペクトルが、周波数 $f \sim 50[\text{Hz}]$ においてピークを持っていることが分かる。ここで、 $50[\text{Hz}]$ は東日本での商用電源周波数である^[8]。自分の声と音叉の音を録音していたとき、コンピューターの周囲に、商用電源で駆動する実験装置や機器があったため、それらの装置・機器が電源の周波数により、 $50[\text{Hz}]$ 程度の音を発していたのではないかと考えられる⁵。商用電源がノイズの一因となることが分かった。

参考文献

- [1] 浜谷望著, "物理実験学 講義プリント" (2013).
- [2] 南茂夫編著, "科学計測のための波形データ処理", CQ 出版社 (1986).
- [3] Wikipedia, "赤池情報量規準", Wikipedia (2014), 2014 年 11 月 24 日取得.
- [4] "PC 解析 実験プリント" (2012).
- [5] Wikipedia, "カイ二乗検定", Wikipedia (2014), 2014 年 11 月 24 日取得.
- [6] Wikipedia, "オクターヴ", Wikipedia (2014), 2014 年 11 月 24 日取得.
- [7] Wikipedia, "1/f ゆらぎ", Wikipedia (2014), 2014 年 11 月 24 日取得.
- [8] Wikipedia, "商用電源周波数", Wikipedia (2014), 2014 年 11 月 24 日取得.

⁵もし西日本で同様の測定を行ったら $60[\text{Hz}]$ にピークが立つのではないかと推測されます。