

# カオス・フラクタル

野澤恵理花<sup>1</sup>

共同実験者

KMさん

実験日時

|         |      |      |           |   |                    |
|---------|------|------|-----------|---|--------------------|
| 平成 26 年 | 12 月 | 8 日  | 13 時 20 分 | ~ | 17 時 10 分          |
| 平成 26 年 | 12 月 | 15 日 | 11 時 00 分 | ~ | 13 時 20 分          |
|         |      |      | 14 時 00 分 | ~ | 16 時 40 分          |
| 平成 26 年 | 12 月 | 22 日 | 13 時 20 分 | ~ | 16 時 30 分          |
| 平成 26 年 | 1 月  | 12 日 | 13 時 00 分 | ~ | 16 時 30 分          |
| 平成 26 年 | 1 月  | 19 日 | 13 時 20 分 | ~ | 16 時 30 分 (解析及び議論) |

要旨

カオスやフラクタルは、その理解の難しさとは対照に、自然界のいたるところに現れる、私たちにとって身近な存在である。この報告では、まず、DLA パターンによる金属葉のフラクタルを生成し、そのフラクタル次元を求める。次に、ダブルスクロール回路を作成し、そのアトラクタによる分岐図を描く。それらの結果から、カオス・フラクタルの特徴と普遍性について考察する。

---

<sup>1</sup>g1220217@edu.cc.ocha.ac.jp

# 1 序論

カオスの定義は研究者によって異なり、現時点において、その厳密な定義は存在しない<sup>[1]</sup>。その理由は、カオスの研究分野が、疫学、音楽、解剖学、化学、機械工学、気象学、経済学、言語学、航空工学、循環器学、消化器学、情報科学、心理学、数学、生化学、制御工学、精神医学、生態学、生体工学、生物学、生物物理学、生理学、船舶工学、地質学、電気工学、電子工学、天文学、土木工学、脳神経科学、美術、物理学、免疫学など非常に多岐に渡っていること<sup>[1]</sup>、カオスについての様々な解釈が存在するためではないかと言われている<sup>[1]</sup>。カオスの一般的な定義を述べれば、決定論的な非線形力学系が作り出す、初期値鋭敏性（軌道不安定性）を持つ有界で非周期的な運動となる。

1961年、ローレンツが気象モデルの数値計算で、上田がアナログコンピュータのシミュレーションで、それぞれ独立にカオスを発見した。これにより、それまでノイズやシステムの不具合によるものと考えられていた、非周期的で複雑な運動は、比較的次元の非線形力学系によっても作られることが判明し<sup>[2]</sup>、そのような運動の例が数多く見つかった<sup>[1]</sup>。カオスは私たちの身近にある、いたって普通の現象なのである。カオスの研究はその後、高次元の非線形力学系（複雑系）の理解へと向かい、「カオスの遍歴」<sup>[3]</sup>など、カオスを超える新しい概念が生まれている。



図 1: ロマネスコブロッコリー。自然に存在するフラクタルとして知られている。

一方、フラクタルも自然界のいたるところに存在する。例えば、海岸線、河川の分岐、木の枝分かれ、雲の形、星の空間分布、乱流、破壊のパターン、結晶成長、眼底の網膜神経、都市のバス路線、メトロの網目などが挙げられる<sup>[4]</sup>。自己相似性あるいはスケール不変性により、フラクタルの次元は非整数を取る。その結果、フラクタルは特徴的な長さを持たない図形となる。また、特徴的な長さを持たないことで、フラクタルはいたるところ微分不可能な図形でもある。

この報告では、まず、DLA パターンによる金属葉のフラクタルを生成し、そのフラクタル次元を求める。次に、ダブルスクロール回路を作成し、そのアトラクタによる分岐図を描く。それらの結果から、カオス・フラクタルの特徴と普遍性について考察する。

## 2 原理

### 2.1 フラクタル次元

整数  $n$  をユークリッド次元とすると、単位長さ  $l$  を  $\frac{1}{a}$  倍 ( $a$  は任意) することで、

$$b = a^n \tag{1}$$

個の相似形ができる<sup>[1]</sup>。例えば、単位長さ  $l$  を  $\frac{1}{3}$  倍するとき、ユークリッド次元が 1 次元 ( $n = 1$ ) であれば  $b = 3^1 = 3$  本の相似な線、2 次元 ( $n = 2$ ) であれば  $b = 3^2 = 9$  個の相似な面、3 次元 ( $n = 3$ ) であれば  $b = 3^3 = 27$  個の相似な立体が得られる。整数  $n$  を非整数へと (自然に) 拡張することで、

$$b = a^D \tag{2}$$

とし、式 (2) を満足する  $D$  をフラクタル次元、

$$D = \frac{\log b}{\log a} = \log_a b \tag{3}$$

として定義する<sup>[1]</sup>。

例として、カントール集合<sup>[1]</sup>のフラクタル次元  $D$  を求める。図 2 に、カントール集合の作り方を示す。図 2 から、カントール集合では、単位長さ  $l$  の線分を  $\frac{1}{3}$  倍 ( $a = 3$ ) する度に、 $b = 2$  本の相似な線分が得られることが分かる。これより、フラクタル次元  $D$  は、

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2 = 0.6309 \dots \tag{4}$$

となる。

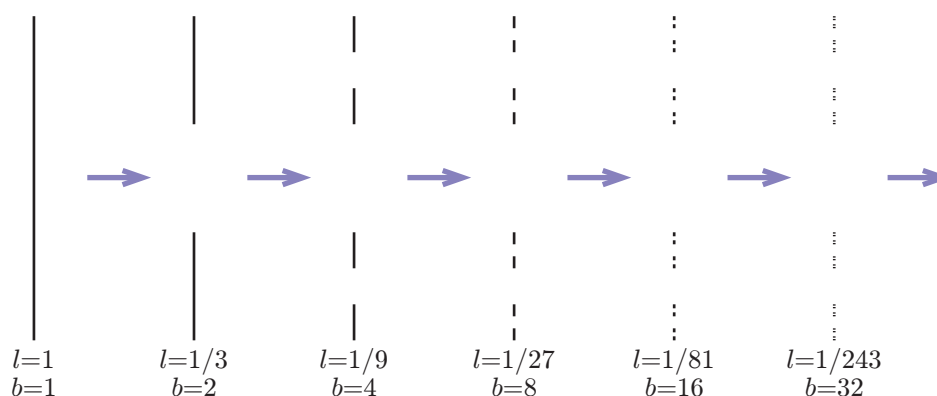


図 2: カントール集合の作り方。カントール集合は、単位長さ  $l$  の線分を 3 等分し、得られた 3 本の線分から中心のものを取り除くという操作を、無限回繰り返すことにより得られる。

## 2.2 密度相関関数とフラクタル次元

ランダムに分布しているある量の座標  $r$  における密度を  $\rho(r)$  とすると、密度相関関数  $C(r)$  は、

$$C(r) = \langle \rho(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \rangle \tag{5}$$

と定義される<sup>[5][6]</sup>。ここで、 $\langle \dots \rangle$  は平均を表わす。特に、分布が一様で等方的であるとき、密度相関関数  $C(r)$  は 2 点間の距離  $r$  のみの関数、

$$C(r) = \langle \rho(r) \rho(0) \rangle \tag{6}$$

となる。ここで、密度  $\rho(0) \neq 0$  である。今、ある点から半径  $r$  内の総質量  $M(r)$  が  $D$  次元のフラクタル分布、

$$M(r) \propto r^D \tag{7}$$

に従っているとする。このとき、半径  $r$  と  $r + \Delta r$  の間に挟まれた球殻内の質量は  $r^{D-1} \Delta r$  に比例し、空間の次元を  $n$  とすると、その球殻の体積は  $r^{n-1} \Delta r$  に比例するので、距離  $r$  における密度  $\rho(r)$  は、

$$\rho(r) \propto \frac{r^{D-1} \Delta r}{r^{n-1} \Delta r} = r^{D-n} \quad (8)$$

となる。式 (6)、式 (8) より、密度相関関数  $C(r)$  は、

$$C(r) = \langle \rho(r) \rho(0) \rangle \propto r^{D-n} = r^{-A} \quad (9)$$

となる。ここで、 $-A$  は、 $r$  と  $C(r)$  の両対数プロットから得られる傾き、

$$-A = \frac{\log C(r)}{\log r} \quad (10)$$

である。式 (9)、式 (10) より、フラクタル次元  $D$  は、

$$D = n - A \quad (11)$$

となる [5][6]。

### 2.3 周期倍分岐ルート

周期アトラクタ (周期点) がストレンジアトラクタ (カオス) へ至るルートの一つに周期倍分岐ルート [1] がある。以下、パラメータ  $a$  ( $0 \leq a \leq 4$ ) 及び、離散時刻  $t$  における変数  $x_t$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) により、

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t) \quad (12)$$

と定義されるロジスティック写像 [1] を用いて、周期倍分岐ルートの特徴について述べる。

図 3 に、パラメータ  $a$  によるロジスティック写像の分岐図 [1] を示す。ここで、横軸はパラメータ  $a$ 、縦軸は変数  $x_t$  であり、パラメータ  $a$  を  $2.5 \leq a \leq 4.0$  の範囲において 0.0015 の刻み幅で変化させ、各  $a$  につき軌道  $\{x_{10000}, \dots, x_{10125}\}$  をプロットした。また、赤い点線は、 $n$  回目の周期倍分岐 (アトラクタが  $2^{n-1}$  周期点から  $2^n$  周期点となる) を起こすパラメータ  $a_n$  を表す。図 3 から、 $n$  回目の周期倍分岐を起こすパラメータ  $a_n$  は、フラクタル的な構造 ( $a_1$  における  $a_2$  が、 $a_2$  における  $a_3$ 、 $a_3$  における  $a_4$  に対応) を有していることが分かる。また、その値は、 $a_1 = 3$ 、 $a_2 \sim 3.45$ 、 $a_3 \sim 3.54$ 、 $a_4 \sim 3.56$  となり、その間隔、

$$\delta_n = a_{n+1} - a_n \quad (13)$$

は、 $n$  の増加と共に、

$$\delta_1 = a_2 - a_1 \sim 3.45 - 3 = 0.45 \quad (14)$$

$$\delta_2 = a_3 - a_2 \sim 3.54 - 3.45 = 0.09 \quad (15)$$

$$\delta_3 = a_4 - a_3 \sim 3.56 - 3.54 = 0.02 \quad (16)$$

と急速に小さくなっていくことが分かる。これより、アトラクタは、 $a = 3.7$  付近 (厳密には  $3.5699456 \dots$  [1]) にある集積点  $a_\infty$  において  $2^\infty$  周期点となり、カオスへと至る。このとき、 $n \rightarrow \infty$  における間隔  $\delta_n$  の変化を表す比  $\delta$  は、物理系に依存せず、

$$\delta \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n}{\delta_{n+1}} = 4.669201609 \dots \quad (17)$$

と一定値 (ファイゲンバウム定数) に収束することが、ファイゲンバウムにより示されている [1]。どのような物理系であっても、周期倍分岐ルートであれば、必ずこのファイゲンバウム定数に従う分岐を示すことから、ファイゲンバウム定数は普遍定数 [1] である。ファイゲンバウム定数により、周期倍分岐ルートは特徴付けられる。

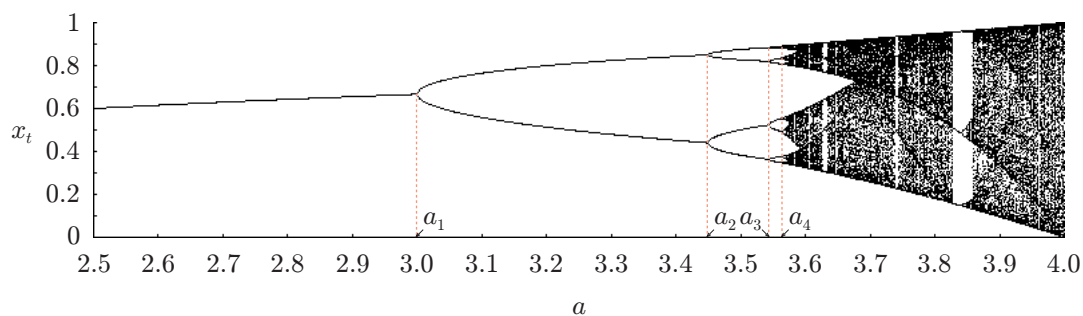


図 3: ロジスティック写像の分岐図。横軸はパラメータ  $a$  であり、縦軸は変数  $x_t$  である。パラメータ  $a$  を  $2.5 \leq a \leq 4.0$  の範囲において 0.0015 の刻み幅で変化させ、各  $a$  につき軌道  $\{x_{10000}, \dots, x_{10125}\}$  をプロットした。赤い点線は、 $n$  回目の周期倍分岐（アトラクタが  $2^{n-1}$  周期点から  $2^n$  周期点となる）を起こすパラメータ  $a_n$  を表す。

### 3 装置

本実験では、次の二つを行った。

- DLA パターンの成長と解析
- ダブルスクロール回路のカオスの観測

以下、各実験における実験装置について述べる。

#### 3.1 DLA パターンの成長と解析

図 4 に、装置の写真を示す。図 4 に示すように、装置は、酢酸ブチル、台座、試料、電源装置からなる。試料は硫酸亜鉛水溶液であり、リング状亜鉛板付きのシャーレ内に満たされている。電源装置は、ワニ口リップを用いて試料に接続されている。台座上に置かれた試料は、酢酸ブチルを適量注いだ後に、電源装置の電圧によって電気分解される。

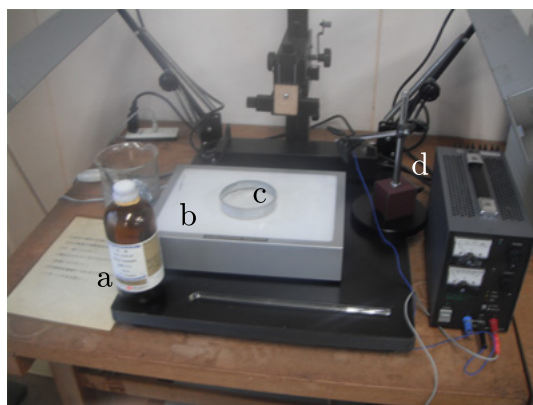


図 4: 装置の写真。装置は、(a) 酢酸ブチル、(b) 台座、(c) 試料、(d) 電源装置からなる。

図 5 に、試料に用いた硫酸亜鉛水溶液の写真を示す。硫酸亜鉛水溶液は、蒸留水 75[ml] に硫酸亜鉛七水和物 43.14[g] を溶かして作ったものである。

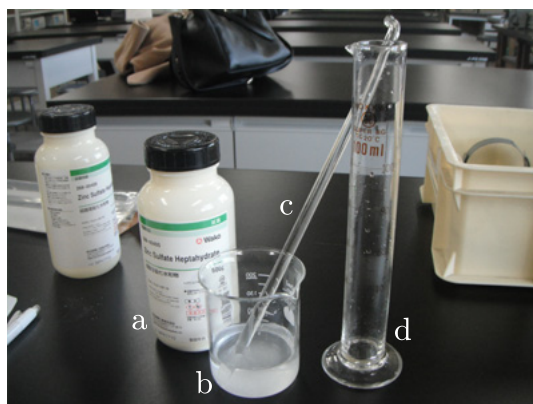


図 5: 試料の写真。(a) 硫酸亜鉛七水和物、(b) ビーカー、(c) ガラス棒、(d) メスシリンダー。

### 3.2 ダブルスクロール回路のカオスの観測

図 6 に、装置の写真を示す。図 6 に示すように、装置は、オシロスコープ、ダブルスクロール回路、電源装置からなる。オシロスコープ、電源装置はダブルスクロール回路に接続されている。ダブルスクロール回路内の可変抵抗を変化させながら、オシロスコープにより回路の電圧を観測する。

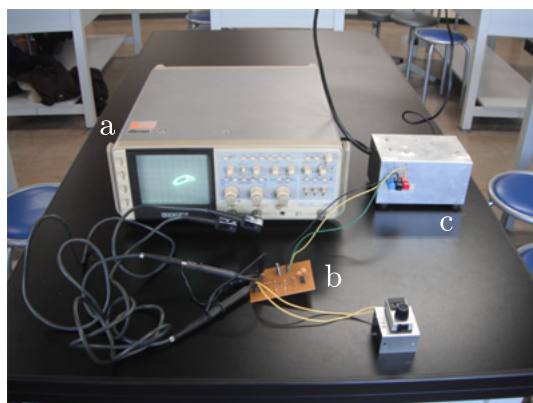


図 6: 装置の写真。装置は、(a) オシロスコープ、(b) ダブルスクロール回路、(c) 電源装置からなる。

図 7 に、ダブルスクロール回路の回路図を示す<sup>2</sup>。図 7 に示したように、ダブルスクロール回路は、コイル、コンデンサ、抵抗、可変抵抗、ダイオード、オペアンプからなる。ダブルスクロール回路は、3 変数の連続力学系であり、インダクタンス  $L$  のコイルを流れる電流を  $I_L$ 、静電容量  $C_1$  のコンデンサにかかる電圧を  $V_{C_1}$  とし、静電容量  $C_2$  のコンデンサにかかる電圧を  $V_{C_2}$  とすると、

$$C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = G(V_{C_2} - V_{C_1}) - g(V_{C_1}) \quad (18)$$

<sup>2</sup>可変抵抗の右隣の抵抗は、サンプルでは 1[k ]となっていたのですが、抵抗のカラーコードの色を見間違えて、82[ ]の抵抗を使って回路を作ってしまった



$$C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = G(V_{C_1} - V_{C_2}) + I_L \quad (19)$$

$$L \frac{dV_{I_L}}{dt} = -V_{C_2} \quad (20)$$

と与えられる。ここで、 $G$  は可変抵抗のコンダクタンス、 $g(V)$  はダイオードを含む部分回路による折れ線特性であり、パラメータ  $m_0$ 、 $m_1$ 、 $B_p$  を用いて、

$$g(V) = m_0 V + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|V + B_p| - |V - B_p|) \quad (21)$$

と表される。 $g(V)$  によって、この力学系は非線形性を持つ。

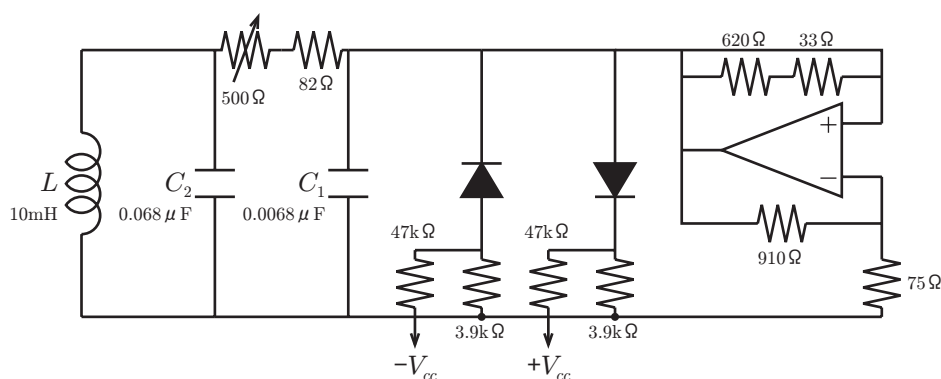


図 7: ダブルスクロール回路の回路図。ダブルスクロール回路は、コイル、コンデンサ、抵抗、可変抵抗、ダイオード、オペアンプからなる。

## 4 実験手順

### 4.1 DLA パターンの成長と解析

まず、以下の手順で、試料の作成、及び、実験を行った。

1. はかりを用いて硫酸亜鉛七水和物 (図 5(a)) 43.14[g] を量り、メスシリンダー (図 5(d)) を用いて蒸留水 75[ml] を量ってビーカー (図 5(b)) に注いだ後、ビーカー内の液体が透明になるまでガラス棒 (図 5(c)) でかき混ぜて、硫酸亜鉛水溶液 (図 4(c)) を作った。
2. 側面にリング状亜鉛板をはめ込んだシャーレに、作った硫酸亜鉛水溶液を深さ 4[mm] 程度まで注いだ。
3. シャーレを台 (図 4(b)) の上に置いた後、酢酸ブチル (図 4(a)) をシャーレに注いだ。
4. 電源装置 (図 4(d)) のプラス端子側のワニ口クリップでシャーレのリング状亜鉛板を、マイナス端子側のワニ口クリップでシャープペンシルの芯を挟んだ。
5. シャープペンシルの芯をシャーレ内の液に浅く浸けた後、電源装置のスイッチを入れ、電圧を 6[V] まで徐々に上げた。
6. 電源装置の電流メータを確認し、電流が流れていないようであれば、電源装置のスイッチを切り、シャープペンシルの芯を少し深く浸け直した後、5 の手順と同様に、電源装置のスイッチを入れ、電圧を 6[V] まで徐々に上げた。電流が流れるようになるまで、この手順を繰り返した。

7. 金属葉がリング状亜鉛板から 1[cm] くらいの大きさまで成長したところで電源装置のスイッチを切った。
8. 台の上にカメラを取り付け、金属葉の写真を撮影した。

次に、以下の手順で、コンピュータによる解析を行った。

1. 撮影した金属葉の写真をコンピュータに取り込んだ。
2. Photoshop を起動した。
3. メニューの「ファイル」>「開く」を選択し、金属葉の画像を読み込んだ。
4. メニューの「イメージ」>「モード」>「グレースケール」を選択し、画像をグレースケール化した。
5. 矩形選択ツールを用いて、画像の金属葉部分をコピーした。
6. メニューの「ファイル」>「新規」を選択し、新しい画像ファイルを作成し、コピーした画像をペーストした。
7. メニューの「イメージ」>「色調補正」>「明るさ・コントラスト」を選択し、画像の明るさとコントラストを 70 まで上げた。
8. 消しゴムツールを用いて、解析に不要な部分（金属葉の末端部分など）を画像から削除した。
9. メニューの「ファイル」>「別名で保存」を選択し、画像を別名で保存した。
10. メニューの「イメージ」>「画像解像度」を選択し、解像度 144[pixel/inch] に設定し、画像の幅を約 18[cm] に設定した。
11. メニューの「ファイル」>「プリント」を選択し、得られた画像を印刷した。
12. メニューの「ファイル」>「開く」を選択し、手順 9 で保存した画像を読み込んだ。
13. メニューの「イメージ」>「モード」>「モノクロ 2 階調」を選択し、画像をモノクロ 2 階調化した。
14. 縦横比を幅 : 高さ = 1 : 1 とした矩形選択ツールを用いて画像を選択した後、メニューの「イメージ」>「切り抜き」を選択し、画像を正方形にトリミングした。
15. メニューの「イメージ」>「画像解像度」を選択し、幅 400[px]、縦 400[px] に設定した。
16. メニューの「ファイル」>「別名で保存」を選択し、画像を TIFF 形式で保存した。
17. GraphicsConverter を起動した。
18. Photoshop で作成した TIFF 形式の画像ファイルを開き、ASCII-text ファイルとして保存した。
19. mathematica を起動した。
20. GraphicsConverter で作成した ASCII-text ファイルを開き、「400 400」と書かれた行を削除した後、上書き保存した。
21. kaiseki.nb を開き、プログラム中で指定されている入力ファイル名を、手順 20 で得られた ASCII-text ファイルのファイル名に書き直した。
22. 手順 20 で得られた ASCII-text ファイルの二次元フーリエ変換を行い、パワースペクトルを求め、それを逆フーリエ変換することで密度相関関数を求めた。



## 4.2 ダブルスクロール回路のカオスの観測

以下の手順で、ダブルスクロール回路の作成、及び、実験を行った。

1. サンプルを参考に、プリント基板に電動ドリルで穴を開けた後、ダブルスクロール回路の導線となる部分に油性マジックを用いて線を引いた。
2. プリント基板を 30 分間エッジング溶液に浸けて銅を溶かし、水洗いしてマジックを落とした。
3. サンプルを参考に、電子部品をはんだ付けし、ダブルスクロール回路 (図 6(b)) を作った。コンデンサーやダイオードには極性があるため、配線する方向に注意した。
4. ダブルスクロール回路にオシロスコープ (図 6(a)) と電源装置 (図 6(c)) を接続した。ここで、オシロスコープの CH1、CH2 をそれぞれ 2 つのコンデンサーに接続した。
5. 可変抵抗の値を変えながら、オシロスコープを用いて振幅電圧を測定した。

## 5 結果

### 5.1 DLA パターンの成長と解析

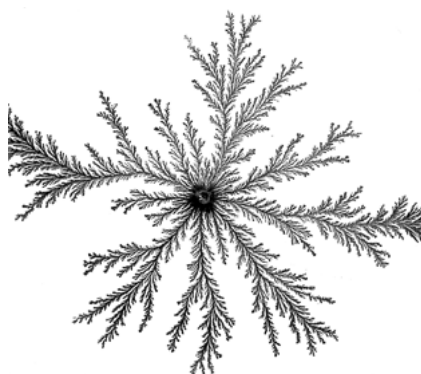


図 8: 実験で得られた金属葉。

図 8 に、実験で得られた金属葉を示す。図 8 から、金属葉は、大きな枝から枝が伸び、その枝から小さな枝が伸びるというように、フラクタル構造を持っていることが分かる。図 9 に、金属葉の密度相関関数  $C(r)$  の様子を示す。ここで、横軸を  $\log_{10} r$  とし、縦軸は  $\log_{10} C(r)$  とした。プロットした点がほぼ直線的に並んでいることから、金属葉の密度相関関数  $C(r)$  が半径  $r$  のべき乗に比例していることが分かる。 $\log_{10} C(r)$  の回帰直線を求めると、

$$\log_{10} C(r) = -0.256723321 \log_{10} r + 1.5884829003 \quad (22)$$

となり (残差の二乗和  $3.7 \times 10^{-2}$ )

$$C(r) \propto r^{-0.256723321} \quad (23)$$

となる。よって、式 (11) から、金属葉のフラクタル次元  $D$  は、

$$D = 2 - 0.256723321 \sim 1.74 \quad (24)$$

と求まる。DLA のフラクタル次元  $D$  は  $D = \frac{5}{3} \sim 1.67$  であるので、本実験における金属葉のフラクタル次元  $D$  は少し高め of 値を取っている。

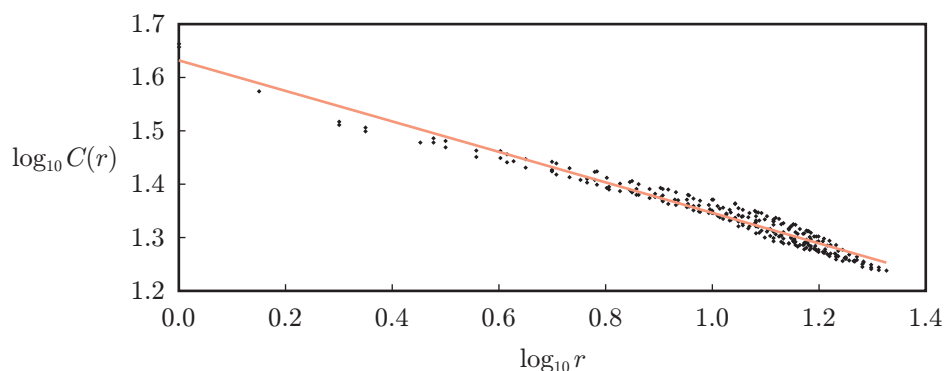


図 9: 金属葉の密度相関関数。横軸は  $\log_{10} r$  であり、縦軸は  $\log_{10} C(r)$  である。黒い点は測定結果を表し、赤い直線は測定結果の回帰直線を表す。

## 5.2 ダブルスクロール回路のカオスの観測

図 10 に、ダブルスクロール回路のアトラクタの様子を示す。図 10 から分かるように、ダブルスクロール回路のアトラクタは、可変抵抗値の増加に伴い、次のように変化する。

1. 固定点 (図 10(a))
2. 一周期点、二周期点、四周期点、八周期点の  $2^n$  周期点 (図 10(b) ~ 図 10(e))
3. カオス (図 10(f))
4. 三周期窓 (図 10(g))、六周期窓 (図 10(h))
5. やや発達したカオス (図 10(i))
6. 五周期窓 (図 10(j))
7. 十分発達したカオス<sup>3</sup>
8. 大きさが二倍の八の字型のカオス (図 10(k))
9. 対称な・非対称な周期点 (図 10(l)、(n)) とカオス (図 10(m)、(o)) 間の遷移
10. 大きな一周期点 (図 10(p))

アトラクタが八の字型のカオスになる直前までにおいて、振幅電圧  $\Delta V$  を測定して分岐図を作った。表 1 に、可変抵抗のパラメータ  $\rho$  ( $466 \leq \rho \leq 525$ ) に対する振幅電圧  $\Delta V$  [mV] の測定値を示す。ここで、 $\rho$  は可変抵抗の抵抗値  $R$  に比例し、 $\rho \sim 0.2R$  である。図 11 に、表 1 の測定結果を元にした、ダブルスクロール回路の分岐図を示す。図 11 から、 $n$  回目の周期倍分岐を起こすパラメータ  $\rho$  を  $\rho_n$  とすると、その間隔  $\delta_n = \rho_{n+1} - \rho_n$  が指数関数的に小さくなっていく、周期倍分岐の特徴が見られることが分かる。

<sup>3</sup>写真を撮りそびれましたが、目で確かに確認しております。

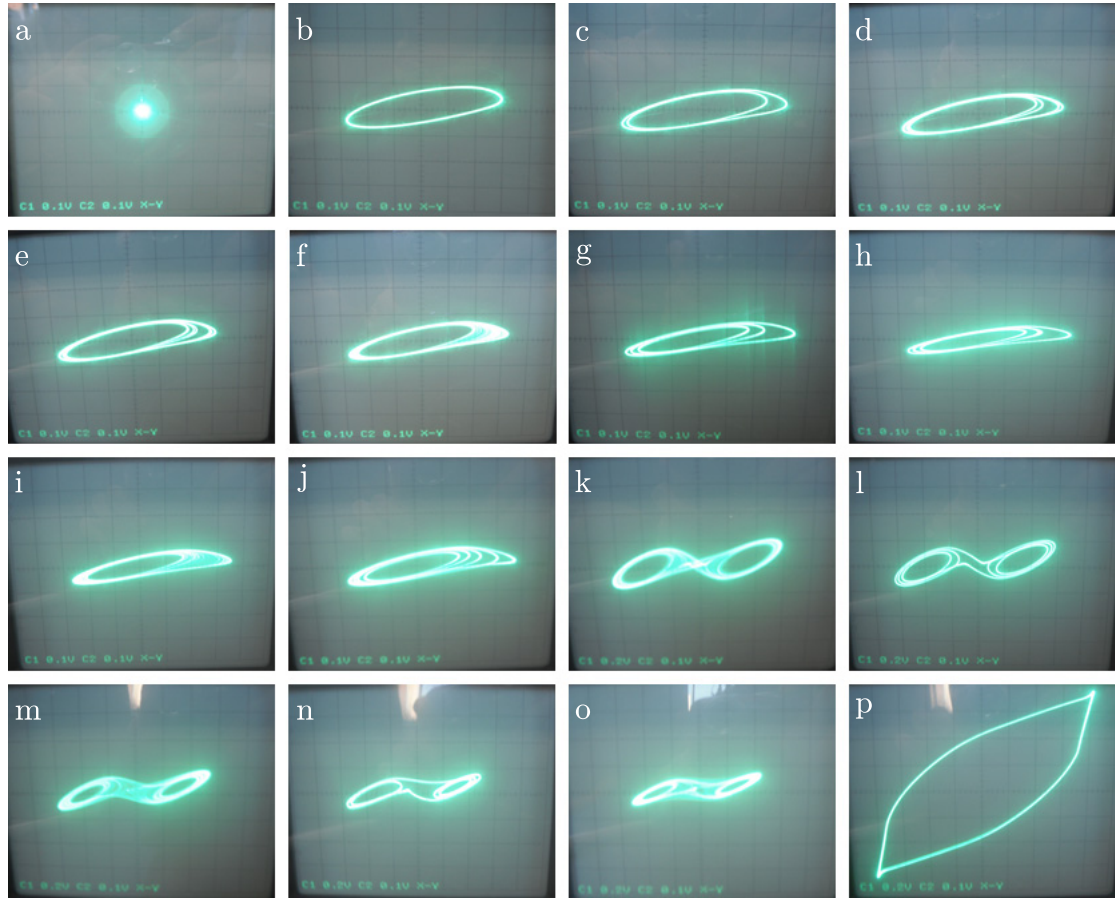


図 10: ダブルスクロール回路のアトラクタ。(a) 固定点、(b) 一周期点、(c) 二周期点、(d) 四周期点、(e) 八周期点、(f) カオス、(g) 三周期窓、(h) 六周期窓、(i) やや発達したカオス、(j) 五周期点、(k) 八の字型のカオス、(l) 対称な周期点、(m) 八の字型のカオス、(n) 非対称周期点、(o) 八の字型のカオス、(p) 一周期点。

表 1: 可変抵抗のパラメータ  $\rho$  に対する振幅電圧  $\Delta V$  [mV] の測定値。 $\rho < 524$  において振幅電圧  $\Delta V$  は全て  $\Delta V = 0$  [mV] であった。 $\rho = 524$  は五周期点であったが、振幅電圧  $\Delta V$  を測定できなかったため、空欄とした。

| $\rho$ | $\Delta V$ [mV] | $\rho$ | $\Delta V$ [mV] | $\rho$ | $\Delta V$ [mV] | $\rho$ | $\Delta V$ [mV] | $\rho$ | $\Delta V$ [mV] |
|--------|-----------------|--------|-----------------|--------|-----------------|--------|-----------------|--------|-----------------|
| 466    | 581             | 503    | 524             | 506.2  | 495             | 511    | 600             | 522    | 469             |
| 475    | 581             | 503    | 576             | 506.2  | 499             | 514    | 600             | 522    | 481             |
| 484    | 575             | 505    | 508             | 506.2  | 523             | 517    | 600             | 522    | 605             |
| 493    | 567             | 505    | 523             | 506.2  | 533             | 519    | 428             | 522    | 608             |
| 494.4  | 555             | 505    | 569             | 506.2  | 563             | 519    | 484             | 523    | 609             |
| 494.4  | 569             | 505    | 570             | 506.2  | 566             | 519    | 609             | 524    | —               |
| 497    | 545             | 506    | 497             | 506.2  | 570             | 520    | 392             | 525    | 624             |
| 497    | 574             | 506    | 530             | 506.2  | 573             | 520    | 479             |        |                 |
| 500    | 531             | 506    | 568             | 507    | 600             | 520    | 609             |        |                 |
| 500    | 577             | 506    | 574             | 509    | 600             | 522    | 386             |        |                 |

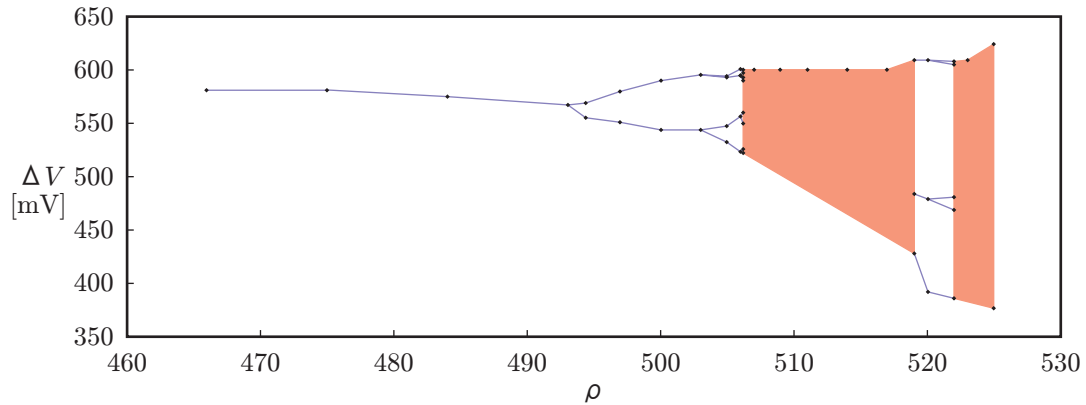


図 11: ダブルスクロール回路の分岐図。横軸は可変抵抗パラメータ  $\rho$  であり、縦軸は振幅電圧  $\Delta V$  [mV] である。黒い点は測定値、青い直線は測定値を結んだ直線であり、赤い領域はカオスを表す。 $\rho$  が  $494.4 \leq \rho \leq 506.2$  の範囲において、振幅電圧の補正に  $\Delta V = \frac{27}{506.2-494.4}(\rho - 494.4)$  を用いた。

## 6 考察

### 6.1 DLA パターンの成長と解析

本実験では、硫酸亜鉛水溶液を電気分解し、得られた金属葉のパターンからフラクタル次元を求めた。その結果、金属葉のフラクタル次元  $D$  は  $D = 1.74$  となり、DLA のフラクタル次元よりも大きな値を取ることが分かった。図 9 から、密度相関関数  $C(r)$  を対数プロットしたグラフは、 $r = 1$  の前後で傾きが変化しているように見える。そこで、 $r$  が  $r \geq 1$  を満たす範囲の密度相関関数  $C(r)$  の測定値を用いて、DLA のフラクタル次元を求め直す。図 12 に、 $r$  が  $r \geq 1$  の範囲における密度相関関数  $C(r)$  の両対数プロットを示す。 $\log_{10} C(r)$  の回帰直線を求めると、

$$\log_{10} C(r) = -0.332045251 \log_{10} r + 1.674856044 \quad (25)$$

となり (残差の二乗和  $1.9 \times 10^{-2}$ )

$$C(r) \propto r^{-0.332045251} \quad (26)$$

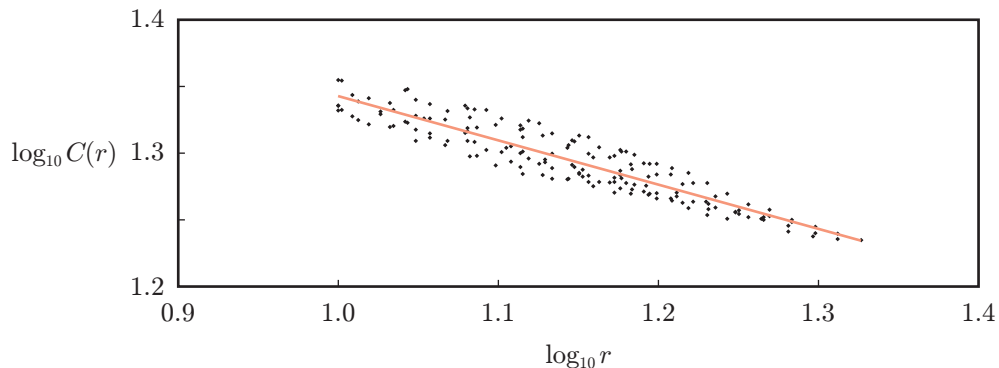


図 12:  $r$  が  $r \geq 1$  の範囲における、金属葉の密度相関関数。横軸は  $\log_{10} r$  であり、縦軸は  $\log_{10} C(r)$  である。黒い点は測定結果を表し、赤い直線は測定結果の回帰直線を表す。

となる。よって、式 (11) から、金属葉のフラクタル次元  $D$  は、

$$D = 2 - 0.332045251 \sim 1.67 \quad (27)$$

と求まる。これは、DLA のフラクタル次元  $D = \frac{5}{3} \sim 1.67$  によく一致する。よって、 $r$  が大きい範囲において正確なフラクタル次元  $D$  が得られている。第 4.1 節で述べたように、金属葉の画像は、分解能を良くするためにコントラストを上げている。このとき、コントラストを上げすぎたことで、かえって画像の分解能が落ちてしまい、その結果、金属葉の細かい枝が潰れ、正確なフラクタル次元  $D$  が得られなかったのではないかと思われる。

## 6.2 ダブルスクロール回路のカオスの観測

第 2.3 節で述べたように、周期倍分岐ルートの特徴付ける普遍定数にファイゲンバウム定数がある。第 5.2 節の分岐図 (図 11) から、ファイゲンバウム定数を求める。図 10 から、

$$\delta_1 = \rho_2 - \rho_1 = 10 - 3 = 7 \quad (28)$$

$$\delta_2 = \rho_3 - \rho_2 = 3 - 1 = 2 \quad (29)$$

となることが分かる。よって、図 11 における周期倍分岐のファイゲンバウム定数  $\delta$  は、

$$\delta \sim \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_3 - \rho_2} = \frac{7}{2} = 3.5 \quad (30)$$

となり、ファイゲンバウム定数  $\delta = 4.669201609 \dots$  と比べると、小さな値を取っている。本実験で使用した可変抵抗の分解能が、正確な分岐点の値  $\rho_n$  を測定するのに十分でなかったことが、その要因ではないかと思われる。また、ファイゲンバウム定数  $\delta$  は、実際には収束値であり、式 (30) のようにして求めると値が異なってしまうことも、その要因ではないかと思われる。

## 参考文献

- [1] 合原一幸編著, "カオス カオス理論の基礎と応用", サイエンス社 (1990).
- [2] 外館良衛著, "カオス・フラクタル 実験プリント" (2014).
- [3] 金子邦彦, 津田一郎著, "複雑系双書 1 複雑系のカオス的シナリオ", 朝倉書店 (1996).
- [4] 中山恒義著, "複雑系のダイナミクス: フラクタル構造を中心として", 物性研究, 63(1) (1994).
- [5] 松下貢, 佐野雅巳, 早川美徳, 沢田康次著, "金属葉のフラクタル構造".
- [6] 高安秀樹著, "フラクタルの物理", 物性研究, 44(6) (1985).